

Leçons et montages à l'agrégation

Préparation à l'agrégation de physique-chimie 2018 – 2019

Rémi BERTHOZ
remi.berthoz@etu.unistra.fr

Notes de la préparation à l'oral, plans détaillés des leçons de physique, de chimie, et des montages de physique.

UFR de Physique et Ingénierie
Université de Strasbourg

I	Leçons de physique	6
1	Contact entre deux solides, frottement.....	7
2	Gravitation	10
3	Caractère non galiléen du référentiel terrestre	14
4	Précession dans les domaines macroscopique et microscopique	18
5	Lois de conservation en dynamique	23
6	Cinématique relativiste	26
7	Dynamique relativiste	30
8	Notion de viscosité d'un fluide, écoulement visqueux	33
9	Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide	37
10	Phénomènes interfaciaux impliquant des fluides	38
11	Gaz réels, gaz parfait.....	41
12	Premier principe de la thermodynamique.....	45
13	Évolution et condition d'équilibre d'un système thermodynamique fermé.....	48
14	Machines thermiques réelles	53
15	Transitions de phase	57
16	Facteur de BOLTZMANN	62
17	Rayonnement d'équilibre thermique, corps noir.....	66
18	Phénomènes de transport	71
19	Bilans thermiques : flux conductif, convectif et radiatif	74
20	Conversion de puissance électromécanique.....	79
21	Induction électromagnétique	83
22	Rétroaction et oscillations	92
23	Aspects analogique et numérique du traitement d'un signal, étude spectrale.....	96
24	Ondes progressives, ondes stationnaires	98
25	Ondes acoustiques	103
26	Propagation avec dispersion	110
27	Propagation guidée des ondes.....	115
28	Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques.....	120
29	Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs	123
30	Rayonnement dipolaire électrique	124
31	Présentation de l'optique géométrique à l'aide du principe de FERMAT	133
32	Microscopies optiques	139
33	Interférences à deux ondes en optique.....	143
34	Interférométrie à division d'amplitude	149
35	Diffraction de FRAUNHOFER.....	156
36	Diffraction par des structures périodiques	160
37	Absorption et émission de la lumière	164
38	Aspect corpusculaire du rayonnement, notion de photons	165
39	Aspect ondulatoire de la matière, notion de fonction d'onde	171

40	Confinement d'une particule et quantification de l'énergie	172
41	Effet tunnel	176
42	Fusion, fission	179
43	Évolution temporelle d'un système quantique à deux niveaux	183
44	Capacités thermiques : description, interprétations microscopiques	186
45	Paramagnétisme, ferromagnétisme : approximation du champ moyen	191
46	Propriétés macroscopiques des corps ferromagnétiques	200
47	Mécanismes de la conduction électrique dans les solides	202
48	Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique	207
49	Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarités	210

II Leçons de chimie 215

1	Chimie et couleur (Lycée)	216
2	Séparations, purifications, contrôles de pureté (Lycée)	217
3	Polymères (Lycée)	218
4	Chimie durable (Lycée)	219
5	Synthèses inorganiques (Lycée)	220
6	Stratégies et sélectivités en synthèse organique (Lycée)	221
7	Dosages (Lycée)	222
8	Cinétique et catalyse (Lycée)	223
9	Caractérisations par spectroscopie en synthèse organique (Lycée)	224
10	Du macroscopique au microscopique dans les synthèses organiques (Lycée)	225
11	Capteurs électrochimiques (Lycée)	229
12	Molécules de la santé (Lycée)	230
13	Stéréochimie et molécules du vivant (Lycée)	231
14	Acides et bases (Lycée)	232
15	Liaisons chimiques (Lycée)	233
16	Solvants (CPGE)	234
17	Classification périodique (CPGE)	235
18	Solides cristallins (CPGE)	238
19	Corps purs et mélanges binaires (CPGE)	239
20	Application du premier principe de la thermodynamique à la réaction chimique	240
21	Détermination de constantes d'équilibre (CPGE)	242
22	Cinétique homogène (CPGE)	243
23	Évolution et équilibre chimique (CPGE)	246
24	Diagrammes potentiel-pH (construction exclue) (CPGE)	250
25	Optimisation d'un procédé chimique (CPGE)	251
26	Corrosion humide des métaux (CPGE)	252
27	Conversion réciproque d'énergie électrique en énergie chimique (CPGE)	253
28	Solubilité (CPGE)	255
29	Cinétique électrochimique (CPGE)	256
A	L'aspirine	257

B	Bromation du stilbène.....	259
C	Déshydratation d'un alcool	260
D	Paracétamol	261
III Montages de physique		263
1	Dynamique du point et du solide	264
2	Surfaces et interfaces	266
3	Dynamique des fluides	267
4	Capteurs de grandeurs mécaniques.....	269
5	Mesure de température	270
6	Transitions de phase	273
7	Instruments d'optique	274
8	Interférences lumineuses	275
9	Diffraction des ondes lumineuses.....	277
10	Spectrométrie optique	278
11	Émission et absorption de la lumière	279
12	Photorécepteurs	280
13	Biréfringence, pouvoir rotatoire	281
14	Polarisation des ondes électromagnétiques.....	284
15	Production et mesure de champs magnétiques	285
16	Milieux magnétiques	287
17	Métaux.....	288
18	Matériaux semi-conducteurs.....	289
19	Effets capacitifs.....	290
20	Induction, auto-induction	291
21	Production et conversion d'énergie électrique.....	292
22	Amplification de signaux	293
23	Mise en forme, transport et détection de l'information	294
24	Signal et bruit	295
25	Mesure des fréquences temporelles (domaine de l'optique exclu)	296
26	Mesure de longueurs	298
27	Systèmes bouclés.....	299
28	Instabilités et phénomènes non-linéaires.....	301
29	Ondes : propagation et conditions aux limites.....	302
30	Acoustique	303
31	Résonance	304
32	Couplage des oscillateurs.....	305
33	Régimes transitoires	306
34	Phénomènes de transport	307
35	Moteurs	308
A	Phénomènes de battements.....	309
B	Chute de la bille.....	311

C	Courbe de première aimantation.....	312
D	Fréquencemètre numérique	313
E	Optique de FOURIER	314
F	Pont de SAUTY	315
G	Pont de WIEN	316
H	Circuit RLC série	317
I	Circuits RLC série couplés par induction	318
J	Susceptibilité magnétique d'une solution aqueuse de FeCl_3	319
K	Transformateur	320
L	Transformée de FOURIER	322
	Table des constantes physiques	325
	Bibliographie	326
	Licence	331

Leçons de physique

LP 1 : Contact entre deux solides, frottement

[64]

1. Cinématique

1.1 Vitesse de glissement

Translation pure La vitesse de glissement \mathbf{v}_g entre deux solides S_1 et S_2 en contact et en translation l'un par rapport à l'autre est la vitesse relative entre deux points I_1 et I_2 (appartenant respectivement à S_1 et S_2) situés au niveau de la surface de contact :

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_{I_1/I_2}$$

Si $\mathbf{v}_g = \mathbf{0}$ il y a *adhérence* entre les deux solides, sinon il y a *glissement*.

Translation et rotation On considère une roue (S_1) de centre O' qui se déplace sur sol avec le vecteur rotation $\boldsymbol{\omega}$ et la vitesse linéaire $\mathbf{v}_{O'/O}$. La vitesse d'un point M sur la roue par rapport à O s'écrit :

$$\mathbf{v}_{M/O} = \mathbf{v}_{M/O'} + \mathbf{v}_{O'/O} = \boldsymbol{\omega} \overrightarrow{O'M} + \mathbf{v}_{O'/O}$$

On peut exprimer cette vitesse pour le point I_1 lié à la roue qui se situe au niveau du contact entre la roue et le sol :

$$\mathbf{v}_{I_1/O} = \mathbf{v}_{O'/O} + \boldsymbol{\omega} \overrightarrow{O'I_1}$$

Pour exprimer la vitesse de glissement de la roue sur le sol, on doit introduire un point I_2 lié au sol et situé au niveau du contact entre la roue et le sol :

$$\mathbf{v}_g = \mathbf{v}_{I_1/I_2} = \mathbf{v}_{I_1/O} - \mathbf{v}_{I_2/O} = (\mathbf{v}_{O'/O} + \boldsymbol{\omega} \overrightarrow{O'I_1}) - (\mathbf{0}) = \mathbf{v}_{O'/O} + \boldsymbol{\omega} \overrightarrow{O'I_1}$$

Il y a donc adhérence entre la roue et le sol si et seulement si $\mathbf{v}_{O'/O} = \boldsymbol{\omega} \overrightarrow{O'I_1}$ dans le cas contraire il y a glissement.

MANIP' Illustrer, par exemple avec une roue bloquée qui avance puis une roue qui tourne sur place.

1.2 Centre instantané de rotation

Pour un roulement sans glissement on a :

$$\mathbf{v}_{I_1/O} = \mathbf{v}_{O'/O} + \mathbf{v}_{I_1/O'} = -\boldsymbol{\omega} * \overrightarrow{I_1O} + \boldsymbol{\omega} * \overrightarrow{I_1O} = \mathbf{0}$$

À l'instant précis représenté, le point I_1 de la roue a une vitesse nulle par rapport au sol. On l'appelle *centre instantané de rotation*.

2. Dynamique

2.1 Forces mises en jeu

MANIP' Montrer la manip, montrer que le palet ne glisse pas même si le dynamomètre tire dessus.

On étudie un palet (S_1) tracté par un dynamomètre qui exerce une force \mathbf{F} parallèle au support horizontal. Ce dernier exerce sur la palet une force \mathbf{R} .

Si S_1 est immobile, le principe fondamental de la dynamique assure l'équilibre des forces :

$$\mathbf{F} + \mathbf{P} + \mathbf{R} = \mathbf{0} \implies \mathbf{R} = -(\mathbf{F} + \mathbf{P})$$

Il sera utile de décomposer \mathbf{R} comme la somme d'une force verticale \mathbf{N} (normale au support), et d'une force horizontale \mathbf{T} (tangentielle au support) et dite *force de frottements*, l'intérêt étant de pouvoir opposer les quatre forces (\mathbf{P} , \mathbf{F} , \mathbf{N} , \mathbf{T}) appliquées sur le solide S_1 deux à deux.

D'une part le dynamomètre permet de mesurer $\|\mathbf{F}\|$ et donc de déterminer $\|\mathbf{T}\| = -\|\mathbf{F}\|$, d'autre part l'équilibre mécanique nous permet de connaître $\|\mathbf{N}\| = -\|\mathbf{P}\|$.

2.2 Lois de CLOULOMB (1785)

To-Do Qu'on fait Amonton 1699 et DeVinci 1508 ?

MANIP' Montrer la mesure, puis montrer ce que l'on observe sur le dynamomètre lorsque le palet commence à glisser.

On constate que :

- S_1 adhère tant que $\|\mathbf{F}\| < \|\mathbf{F}_{lim}\|$,
- Si S_1 est en mouvement rectiligne uniforme alors $\|\mathbf{F}\| = cste = \|\mathbf{F}_{dyn}\|$.

Donc quand S_1 est immobile, la force de frottements \mathbf{T} s'adapte à \mathbf{F} pour laisser S_1 en adhérence. Mais au delà d'un certain seuil en norme $\|\mathbf{T}_{lim}\|$, S_1 commence à glisser.

Quand S_1 est en MRU, la force de frottements vaut en norme $\|\mathbf{T}\| = \|\mathbf{T}_{dyn}\|$ et est dans le sens opposé au mouvement. Des manip plus avancées permettent de montrer que l'égalité est valable quelque soit le mouvement.

Les expériences montrent plus quantitativement que :

$$\|\mathbf{T}_{lim}\| = \mu_s \|\mathbf{N}\|$$

$$\|\mathbf{T}_{dyn}\| = \mu_d \|\mathbf{N}\|$$

Où μ_s et μ_d sont les coefficients de frottements *statique* et *dynamique* qui dépendent des matériaux constituant les surfaces en contact.

To-Do Exemples de valeurs

On a parlé de \mathbf{T} mais alors que peut on dire sur \mathbf{R} ?

Comme $\|\mathbf{N}\|$ ne change pas, on peut définir un angle α entre \mathbf{N} et \mathbf{R} qui dépend seulement de $\|\mathbf{T}\|$. Pour $\|\mathbf{T}\| = \|\mathbf{T}_{lim}\|$, on a $\alpha = \alpha_{lim}$. Le solide reste donc immobile tant que

$\alpha < \alpha_{lim}$. Le principe fondamental de la dynamique permet d'obtenir :

$$\alpha_{lim} = \arctan \left(\frac{\|\mathbf{T}_{lim}\|}{\|\mathbf{N}\|} \right) = \arctan(\mu_s)$$

On définit alors le *cône de frottements* de demi-angle d'ouverture $\Phi_s = \arctan(\mu_s)$. Les situations où $\|\mathbf{T}\| < \|\mathbf{T}_{lim}\|$ sont équivalentes aux situations où \mathbf{R} est orienté dans le cône. L'introduction de cet élément géométrique permet d'appréhender plus facilement les problèmes.

On pourra aussi définir $\Phi_d = \arctan(\mu_d)$ demi-angle d'ouverture d'un autre cône sur lequel s'aligne la force \mathbf{T}_{dyn} lors du glissement.

Influence de la surface de contact Tout cela semble conforme à l'expérience, mais quelque chose est surprenant : la surface de contact n'intervient nulle part or une surface plus grande semble prescrire plus de frottements (une adhérence meilleure).

MANIP' Faire la manip avec une boîte parallélépipédique ou plusieurs palets de même constitution mais de surfaces différentes.

On constate que la surface n'a pas d'influence sur $\|\mathbf{T}_{lim}\|$ ni sur $\|\mathbf{T}_{dyn}\|$.

Py-Do Simulation python ?

3. Exemples

3.1 Bicyclette : retour sur le roulement

NOTES

On considère un vélo immobile au départ de l'expérience : $\mathbf{v}_g = \mathbf{0}$. Le poids de la roue et la force normale du sol sur la roue s'opposent.

L'adhérence entre la roue et la route est à l'origine d'une force tangentielle au sol exercée par la roue sur la route lorsque que le cycliste appuie sur une pédale.

Pour ne pas « patiner » en démarant, le cycliste doit exercer sur les pédales un couple tel que la force de réaction exercée par la route sur la roue soit orientée dans le cône de frottements.

Si le vélo avance et que la roue ne glisse pas, c'est que :

- La vitesse de glissement \mathbf{v}_g est nulle,
- La résultante des forces exercées sur la bicyclette est orientée vers l'avant.

exerce une force sur la roue. Attention au schéma dangereux (deux forces s'opposent mais ne s'appliquent pas sur le même solide).

La force R du sol sur la roue est vers l'avant, tant qu'elle reste dans le cône, le vélo avance mais ne glisse pas. Si R sort du cône, on passe en glissement.

Exp : faire du vélo sur la glace, on pédale "dans le vide".

LP 2 : Gravitation

COPERNIC et les anciens étudiaient les mouvements des astres dans le ciel, en essayant de déterminer leurs positions au fil des nuits. L'hypothèse d'un univers géocentrique de PTOLÉMÉE sera contre-dite dans une publication de COPERNIC qui en 1543, après 36 ans d'observations, avance un modèle héliocentrique plus simple du système solaire. L'Église ne s'opposera à ces écrits qu'en 1616 lorsque GALILÉE les confirme par l'expérience. Il se base sur les observations de Tycho BRAHÉ (lui-même adepte du modèle géocentrique) qui le premier a l'idée de sceller le débat par une rigoureuse prise de mesures.

1. État des lieux en 1642 [33] [64]

To-Do Préparer un document à projeter pour aller vite.

1.1 Lois de KÉPLER

KÉPLER, cherchant lui aussi à comprendre le système solaire, s'appuie sur les idées de COPERNIC et les mesures de BRAHÉ. Il ne cherche pas à vérifier que les trajectoires correspondent à des cercles, mais cherche à déterminer directement la forme de leur orbite.

Il en conclut que chaque planète se déplace autour du Soleil selon une trajectoire elliptique.

Il observe aussi que les planètes ne tournent pas autour du Soleil à une vitesse constante, mais se déplacent plus rapidement lorsqu'elles sont plus proches de l'étoile, de sorte que le rayon vecteur liant le Soleil à la planète balaye une surface égale pendant des durées égales. On dira qu'elles ont une *vitesse aréolaire* constante : la surface balayée par unité de temps est constante.

Enfin, il remarque que le temps nécessaire à une planète pour faire le tour de sa trajectoire est proportionnel à la puissance $\frac{3}{2}$ du demi-grand axe de cette dernière.

1.2 Dynamique de GALILÉE [33]

À la même période, GALILÉE qui étudie le mouvement énonçait le principe d'inertie selon lequel un corps préserve son état de repos ou de mouvement tant qu'il n'est pas contraint, par quelque chose qui le touche ou le perturbe autrement, à changer cet état.

2. Contribution de NEWTON (1687)

2.1 Dynamique de NEWTON [33]

NEWTON formalise les idées de GALILÉE, il définit les notions de force et d'accélération puis exprime mathématiquement les trois lois qui portent son nom.

2.2 La loi de gravitation universelle [33]

Il peut conclure que la force exercée par le Soleil sur une planète doit nécessairement être orientée de cette dernière vers ce premier.

Le principe d'action-réaction combiné au principe d'inertie permet d'avancer que la masse du Soleil et la masse de la planète doivent jouer un rôle symétrique dans l'expression de la force d'attraction. Par ailleurs, les calculs de la vitesse de chute de la Lune vers la Terre, puis de celle de la Terre et de Jupiter vers le Soleil, permettent d'établir une relation de la force à la distance en $\frac{1}{r^2}$. L'idée est répétée sur les satellites connus de Jupiter, affirmant un début de caractère universel à la loi ainsi énoncée.

3. Dynamique des astres

On cherche dans cette partie à décrire plus complètement les mouvements d'un système à deux corps liés par la gravitation. On suppose la loi de gravitation de NEWTON et on va montrer qu'elle est mathématiquement conforme aux lois de KÉPLER.

Considérons un objet P de masse m et vitesse \mathbf{v} parcourant une trajectoire autour d'un astre attracteur de centre O et de masse m_\odot , les deux étant reliés par un vecteur \mathbf{r} orienté vers l'objet.

$$\mathbf{F} = -G \frac{mm_\odot}{r^2} \mathbf{e}_r$$

3.1 Loi des aires [64]

D'une part, \mathbf{F} est une force centrale, le calcul de son moment en O donne le vecteur nul, ce qui entraîne $\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{0}$. Le moment cinétique P calculé en O est donc constant et vaut :

$$\mathbf{L}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} = \overrightarrow{\text{cst}}$$

Vu cette expression, \mathbf{r} et \mathbf{v} doivent être contenus dans un plan orthogonal à \mathbf{L}_O , la trajectoire de P est donc contenue dans le plan perpendiculaire à \mathbf{L}_O passant par O . On choisit un repère cylindrique $O(r, \theta, z)$ tel que Oz soit parallèle à \mathbf{L}_O , ce qui permet d'exprimer le vecteur moment cinétique comme $\mathbf{L}_O = L_z \mathbf{e}_z$ avec $L_z = \text{cste}$. Calculons :

$$\mathbf{L}_O = L_z \mathbf{e}_z = r \mathbf{e}_r \times m \dot{\mathbf{r}} = r \mathbf{e}_r \times m (\dot{r} \mathbf{e}_r + r \dot{\theta} \mathbf{e}_\theta) = mr^2 \dot{\theta} \mathbf{e}_z$$

D'où $L_z = mr^2 \dot{\theta}$.

D'autre part, la vitesse aréolaire \mathcal{V}_a définie section 2.1.1 s'exprime :

$$\mathcal{V}_a = \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{1}{dt} \left(\frac{r \times r d\theta}{2} \right) = \frac{L_z}{2m} = \frac{C}{2}$$

D'où finalement, $\mathcal{V}_a = \text{cste}$.

3.2 Trajectoire et période de révolution [11]

Nous avons déjà exprimé les vecteurs \mathbf{r} et \mathbf{v} dans le repère cylindrique. Le vecteur accélération \mathbf{a} peut s'exprimer soit par la dérivée temporelle de \mathbf{v} , soit par le principe

fondamental de la dynamique :

$$\mathbf{a} = -G \frac{m_{\odot}}{r^2} \mathbf{e}_r = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \mathbf{e}_r + \cancel{(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})} \mathbf{e}_{\theta}$$

Par ailleurs nous avons $\dot{\theta} = C/r^2$; et puisque :

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{C}{r^2}$$

alors ces égalités nous permettent de réexprimer $\mathbf{a}(r, \ddot{r}, \dot{\theta})$ comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \left(\frac{d}{dt} \frac{dr}{dt} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right) \mathbf{e}_r = \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) - r \frac{C^2}{r^4} \right) \mathbf{e}_r = \left(\frac{d}{d\theta} \left(\frac{C}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) \frac{d\theta}{dt} - \frac{C^2}{r^3} \right) \mathbf{e}_r \\ &= \frac{C^2}{r^2} \left(-\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{1}{r} \right) \mathbf{e}_r = \mathbf{a}(1/r) \end{aligned}$$

Nous avons maintenant deux expressions pour \mathbf{a} , toutes deux exprimées comme fonctions de $1/r$. C'est l'intérêt de ce calcul qui nous permet d'égaliser $\|\mathbf{a}\|$ pour écrire une équation différentielle de $\frac{1}{r}$ en θ :

$$\frac{C^2}{r^2} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right) = G \frac{m_{\odot}}{r^2} \implies \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} - G \frac{m_{\odot}}{C^2} = 0$$

La résolution de cette équation différentielle donne :

$$\frac{1}{r} = G \frac{m_{\odot}}{C^2} + A \cos(\theta - \theta_0)$$

égalité que l'on peut écrire, en choisissant la constante d'intégration θ_0 nulle :

$$r = \frac{1}{G m_{\odot}/C^2 + A \cos \theta} = \frac{C^2/Gm_{\odot}}{1 + AC^2/Gm_{\odot} \cos \theta} = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$$

que l'on reconnaît comme équation d'une cône d'excentricité e et de paramètre p .

PYTHON `python/coniquesSystemeSolaire.py`

Notre objet P suit donc autour du Soleil une trajectoire qui correspond à une cône, comme l'annonçait la troisième loi (empirique) de KÉPLER pour le cas particulier des planètes.

Astre	Aphélie (au)	Périhélie (au)	Excentricité	Période orbitale (an)
Terre	1,02	0,98	0,0137	1,00
Mars	1,66	1,38	0,0934	1,88
Neptune	30,44	29,77	0,008 58	164,80
Swift-Tuttle	51,23	0,96	0,9362	133,28
Hale-Bopp	370,8	0,91	0,995	4000
Oumuamua		0,25	1,197	

Le cas des orbites fermées permet de définir une période de révolution T , que l'on peut exprimer simplement à partir de l'aire de la surface délimitée par la trajectoire et la vitesse aréolaire :

$$T^2 = \left(\frac{S}{\mathcal{V}_a} \right)^2 = \left(\frac{\pi ab}{C/2} \right)^2 = \frac{\pi^2 a^3 p}{(C/2)^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{Gm_\odot}$$

d'où :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{Gm_\odot} = \text{cste}$$

l'on retrouve la troisième loi de KÉPLER puisque la constante ne dépend que de la masse de l'attracteur.

3.3 Énergie mécanique [64]

L'énergie mécanique de P s'exprime :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c(\dot{r}) + \mathcal{E}_p(r) = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \mathcal{E}_p(r) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{L_z^2}{2mr^2} + \mathcal{E}_p(r)$$

On constate que deux des termes ne dépendent que r . Nous les regroupons en un terme d'énergie potentielle effective :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,e}(r)$$

dont, nous allons le voir, la valeur, comparée à celle de l'énergie mécanique, renseigne elle aussi sur la trajectoire de P .

Py-Do Tracer la courbe et y associer les cônes.

Pour aller plus loin

La gravitation de NEWTON constitue un modèle satisfaisant d'observations astronomiques et quotidiennes, mais certains faits expérimentaux y échappent :

- D'une part elle a entraîné les astronomes, qui observaient des déviations dans l'orbite d'Uranus, à émettre l'hypothèse qu'une huitième planète (aujourd'hui Neptune) pourrait faire partie du système solaire, prédire sa position, et l'observer (1864).
- D'autre part elle n'a jamais su expliquer la précession de l'orbite de Mercure, mesurée dès 1859.

C'est EINSTEIN qui en 1915 propose une nouvelle théorie de la gravitation, résolvant le problème de l'orbite de Mercure. Sa théorie de la relativité générale englobe bien la théorie de NEWTON, et propose l'existence de phénomènes nouveaux qui sont aujourd'hui mesurés. Mais ce modèle pose quant à lui des problèmes plus fondamentaux. . .

LP 3 : Caractère non galiléen du référentiel terrestre

L'objectif de cette leçon est d'étudier l'application du principe fondamental de la dynamique à tous les référentiels, et d'en tirer des résultats comparables aux observations.

Nous avons déjà vu que deux nouveaux termes s'ajoutent à l'accélération, et servent à transposer l'expression d'un référentiel galiléen vers un référentiel non galiléen, tenant compte des effets inertiels.

Dans la leçon nous considéreront les référentiels :

- géocentrique \mathcal{T} , supposé galiléen et repéré par $T(x_{\mathcal{T}}, y_{\mathcal{T}}, z_{\mathcal{T}})$ de sorte que l'axe $Tz_{\mathcal{T}}$ soit l'axe Sud-Nord ;
- du laboratoire, à la latitude λ , repéré par $O(x, y, z)$ de sorte que :
 - Oz corresponde à la verticale locale,
 - Oy soit dirigé vers le Nord,
 - Ox soit dirigé vers l'Est,
 - $\|\overrightarrow{TO}\| = R_T$ soit le rayon de la Terre,

Le vecteur Ω est le vecteur rotation de la Terre autour de $Tz_{\mathcal{T}}$.

L'accélération d'inertie d'entraînement d'un point A dans le laboratoire est :

$$\mathbf{a}_{eA/\mathcal{L}} = \mathbf{a}_{O/\mathcal{T}} + \frac{d\Omega}{dt} \times \overrightarrow{OA} + \Omega \times (\Omega \times \overrightarrow{OA})$$

et l'accélération d'inertie de CORIOLIS s'écrit :

$$\mathbf{a}_{cA/\mathcal{L}} = 2\Omega \times \mathbf{v}_{A/\mathcal{L}}$$

avec des notations usuelles.

1. Effets de l'accélération d'entraînement

1.1 Poids, champ de pesanteur, verticale

Qu'est ce que, expérimentalement, le poids ? Une réponse possible est la suivante : le poids d'un corps est expérimentalement la force qu'il faut compenser pour garder ce corps immobile dans le référentiel géocentrique.

Prenons l'exemple d'une masse m immobile dans \mathcal{L} . La terre y exerce une force via son champ gravitationnel \mathcal{G} , et son support y applique une force \mathbf{F}_r , de sorte que le principe fondamental de la dynamique dans \mathcal{L} s'écrive :

$$m(\mathbf{a}_e + \mathbf{a}_c + \mathbf{0}) = \mathbf{F}_r + m\mathcal{G}(R_T)$$

avec :

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_e &= -\Omega^2 R_T \cos(\lambda) (\cos(\theta) \mathbf{e}_{x_{\mathcal{T}}} + \sin(\theta) \mathbf{e}_{y_{\mathcal{T}}}) = -\Omega^2 R_T (\mathbf{e}_z - \sin(\lambda) \mathbf{e}_{z_{\mathcal{T}}}) \\ &= -\Omega^2 R_T (\cos^2(\lambda) \mathbf{e}_z - \cos(\lambda) \sin(\lambda) \mathbf{e}_y) \end{aligned}$$

ainsi que :

$$\mathbf{a}_c = \mathbf{0}$$

d'où :

$$\mathbf{F}_r = m \left(\left(-\Omega^2 R_T \cos^2(\lambda) + \frac{GM_T}{R_T^2} \right) \mathbf{e}_z - \Omega^2 R_T \cos(\lambda) \sin(\lambda) \mathbf{e}_y \right) = -\mathbf{P} = -m\mathbf{g}$$

définissant ainsi le poids \mathbf{P} et le champ de pesanteur \mathbf{g} .

Alors la verticale étant définie comme la normale au sol (vecteur \mathbf{e}_z) on constate que le champ de pesanteur \mathbf{g} n'y est pas nécessairement parallèle. L'angle α entre les deux varie selon la latitude :

$$\alpha = \begin{cases} 0^\circ 0' 0'' & \text{à l'équateur } (\lambda = 0^\circ) \\ 0^\circ 5' 55'' & \text{à Paris } (\lambda = 48^\circ) \\ 0^\circ 0' 0'' & \text{aux pôles } (\lambda = 90^\circ) \end{cases}$$

Notons qu'à l'équateur les deux directions sont confondues et :

$$\frac{GM_T/R_T^2}{\Omega^2 R_T} = 290 = 17^2$$

autrement dit, si la Terre tournait sur elle-même 17 fois plus rapidement ($\Omega \rightarrow 17\Omega$), le champ de pesanteur serait nul à l'équateur.

2. Effet de l'accélération de CORIOLIS

2.1 Pendule de FOUCAULT (1851) [64]

TO-DO Citer la feuille volante du correcteur.

MANIP' Montrer le pendule que l'on aura lancé en début de leçon.

PYTHON Montrer le script `./python/pendule_de_foucault.py` qui simule le pendule du Panthéon que l'on aura lancé en début de leçon.

NOTES Décrire rapidement l'expérience au Pôle-Nord puis avec les mains à une autre latitude.

On considère maintenant un pendule de période τ qui oscille sur l'axe Sud-Nord local, de masse m au point A , de sommet S , et de sorte que A coïncide avec O au repos, le principe fondamental de la dynamique s'écrit dans le référentiel du laboratoire :

$$m(\mathbf{a}_c + \mathbf{a}_{A/\mathcal{L}}) = f_t \overrightarrow{AS} + m\mathbf{g}$$

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{A/\mathcal{L}}$$

on s'intéresse ici au mouvement dans le plan horizontal, décrit quand \mathbf{a}_c n'est pas présent par :

$$\begin{cases} x(t) &= 0 \\ y(t) &= -Y \cos(\omega t) \end{cases}$$

d'où $\dot{y} = -Y\omega \sin(\omega t)$ (avec $y(0) = -Y$). Alors pour le premier aller ($t \leq \frac{\tau}{2}$) :

$$\mathbf{a}_c = 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{A/\mathcal{L}} = +2\Omega \sin(\lambda) \dot{y} \mathbf{e}_x$$

qui est la seule contribution d'accélération selon \mathbf{e}_x . Donc :

$$\begin{aligned}\|\mathbf{a}_c\| &= \frac{d\dot{x}}{dt} \implies \dot{x} = -2\Omega \sin(\lambda)Y \cos(\omega t) + \text{cste} \\ &= 2\Omega \sin(\lambda)Y(1 - \cos(\omega t))\end{aligned}$$

en prenant $\dot{x}(0) = 0$ pour l'intégration. Enfin, toujours pour $t \leq \frac{\tau}{2}$,

$$x(t) = 2\Omega \sin(\lambda)Y \left(t - \frac{\sin(\omega t)}{\omega} \right)$$

Au bout du premier aller, calculons :

$$x(\tau/2) = 2\Omega Y \sin(\lambda) \frac{\tau}{2} = \delta_0$$

La circonférence du cercle qui joint les différents points de rebroussement (dans l'hypothèse d'un pendule sans amortissement) est $C = 2\pi Y$. On exprime alors :

$$\delta_0 = \frac{\Omega}{2\pi} C \tau \sin(\lambda) = \frac{\tau}{\tau_{\text{Terre}}} C \sin(\lambda)$$

L'application numérique pour le pendule de FOUCAULT au panthéon (pendule haut de 67 m, $\lambda = 48^\circ$ et $Y = 15$ m) donne : $\tau = 16$ s puis $\delta_0 = 1,2$ cm. Le phénomène était donc facilement observable sur ce pendule. Notons que le pendule fait un tour complet après $n = C/\delta_0 \approx 7600$ demi-oscillations en $n\tau = \frac{\tau_{\text{Terre}}}{\sin(\lambda)} = 1,4$ j (résultat qui est indépendant des paramètres du pendule!).

2.2 Déviation vers l'Est (1903) [64]

Lors de la chute d'une bille B sur Terre depuis une altitude h , étudiée dans le référentiel \mathcal{L} , le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m(2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{B/\mathcal{L}} + \mathbf{a}_{B/\mathcal{L}}) = m\mathbf{g}$$

en prenant $\mathbf{v}_{B/\mathcal{L}} = t\mathbf{g}$ et $\mathbf{g} = g\mathbf{e}_z$ il vient :

$$\mathbf{a}_{B/\mathcal{L}} = g\mathbf{e}_z - 2\boldsymbol{\Omega} \times (tg\mathbf{e}_z) = g(\mathbf{e}_z - 2\Omega t \cos(\lambda)\mathbf{e}_x)$$

Le calcul indique que la bille va avoir un mouvement dirigé suivant \mathbf{e}_x (l'Est). L'intégration de $\mathbf{a}_{B/\mathcal{L}} \cdot \mathbf{e}_x$ donne :

$$x(t) = \frac{gt^3 \Omega \cos(\lambda)}{3}$$

puis en introduisant l'altitude de départ h calculée pour une chute qui a duré Δt , $h = 1/2 g\Delta t^2$:

$$x_h = \left(\frac{8h^3}{9g} \right)^{1/2} \Omega \cos(\lambda)$$

on peut calculer la distance horizontale parcourue par la bille pendant sa chute.

FLAMMARION est le premier à avoir réussi l'expérience, depuis la coupole du Panthéon ($h = 68$ m) il a mesuré $x = 7,6$ mm pour une valeur attendue de $x = 8,1$ mm.

2.3 Quelques autres phénomènes

- Les cyclones s'enroulent tous dans le même sens expliqué par les effets de CORIOLIS, en considérant les vents qui convergent vers une zone de dépression.
- Les tireurs d'élite corrigent la déviation vers l'Est due à CORIOLIS quand ils tirent sur de longues distances (3,5 km).
- Les rails de chemin de fer sont plus abimés côté Est (quelque soit la direction des trains qui les empruntent).

3. Marées océaniques [64]

NOTES Dire qu'on pourrait en parler mais ne pas traiter cette partie.

Pour aller plus loin

Dans cette leçon nous considérons le référentiel \mathcal{T} géocentrique comme Galiléen mais bien sûr, il ne l'est pas vraiment.

To-Do Trouver quoi dire de plus sur cette ouverture dangereuse.

LP 4 : Précession dans les domaines macroscopique et microscopique

Dans cette leçon nous utilisons une seule loi pour expliquer des phénomènes présents de l'astrophysique à la physique atomique.

1. La toupie

MANIP' Montrer la toupie.

1.1 Description cinétique

On considère, dans le référentiel galiléen \mathcal{R} repéré par $O(x, y, z)$, un solide S à symétrie cylindrique, de masse m et centre de masse G . On introduit un autre référentiel \mathcal{R}' repéré par $O(i, j, k)$ orienté de sorte que l'axe Ok soit aligné avec l'axe de symétrie du solide, qui est libre de tourner autour du point O . On prend $\|\overrightarrow{OG}\| = l$, et Oz est vertical.

On appelle :

- *Rotation propre*, le mouvement de rotation autour de Ok , associé à la vitesse angulaire $\dot{\varphi}$.
- *Précession*, le mouvement de rotation autour de Oz , associé à la vitesse angulaire $\dot{\psi}$.
- *Nutation*, le mouvement de rotation, associé à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, qui se fait autour d'un axe que nous n'allons pas nommer.

L'approximation gyroscopique est une relation d'ordre sur les vitesses de rotations définies ci-dessus. On fera l'approximation que $\dot{\varphi} \gg \dot{\psi} \gg \dot{\theta}$.

Le vecteur rotation de \mathcal{R}' par rapport à \mathcal{R} va s'écrire : $\boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}'/\mathcal{R}} = \dot{\psi} \mathbf{e}_z$.

Le vecteur rotation de S par rapport à \mathcal{R}' va s'écrire : $\boldsymbol{\Omega}_{S/\mathcal{R}'} = \dot{\varphi} \mathbf{e}_k$.

Le vecteur rotation de S par rapport à \mathcal{R} est donc : $\boldsymbol{\Omega}_{S/\mathcal{R}} = \dot{\psi} \mathbf{e}_z + \dot{\varphi} \mathbf{e}_k$.

1.2 Précession de la toupie

Dans \mathcal{R} on applique le théorème du moment cinétique au solide S en contact parfait avec son support au point O , qui y applique une action mécanique $\mathbf{N} = -m\mathbf{g}$.

$$\left. \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \mathcal{M}_O(-m\mathbf{g}) + \mathcal{M}_O(\mathbf{N}) = -\overrightarrow{OG} \times m\mathbf{g} + \mathbf{0} = mgl(\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_k)$$

Par ailleurs, donné la symétrie, le moment cinétique de S s'écrit :

$$\mathbf{L}_O = \begin{pmatrix} I & & \\ & I & \\ & & J \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{S/\mathcal{R}'} = J\dot{\varphi} \mathbf{e}_k$$

1.2.1 Vitesse de précession

To-Do Voir si les calculs sont faits dans [12].

Alors, en combinant les égalités :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(J\dot{\varphi}\mathbf{e}_k)\Big|_{\mathcal{R}} &= \frac{d}{dt}(J\dot{\varphi}\mathbf{e}_k)\Big|_{\mathcal{R}'} + \boldsymbol{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} \times J\dot{\varphi}\mathbf{e}_k = \mathbf{0} + \dot{\psi}\mathbf{e}_z \times J\dot{\varphi}\mathbf{e}_k \\ &= mgl(\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_k)\end{aligned}$$

d'où après projection :

$$\dot{\psi} = \frac{mgl}{J\dot{\varphi}}$$

algébriquement, la vitesse angulaire de précession.

PY-DO Décrire et schématiser les différents régimes : bouclé, rebroussement, dormant.

MANIP' Application numérique sur la toupie de manip.

1.2.2 Nature du mouvement [64]

D'autre part :

$$\mathbf{L}_O \cdot \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = 0 = \frac{1}{2} \frac{dL_O^2}{dt} \implies \|\mathbf{L}_O\| = \text{cste}$$

Et :

$$\mathbf{e}_z \cdot \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \frac{d\mathbf{L}_O \cdot \mathbf{e}_z}{dt} = 0 \implies L_z = \text{cste}$$

Ces résultats permettent d'affirmer que le moment cinétique \mathbf{L}_O et donc $\boldsymbol{\Omega}_{S/\mathcal{R}'}$ ainsi que l'axe de symétrie de la toupie (Ok), décrivent un cône autour de l'axe Oz , cône parcouru dans le même sens de rotation que la rotation propre.

1.3 La Terre comme un gyroscope déséquilibré [64]

To-Do Application numérique de la Terre dans le champ de pesanteur du Soleil.
Cycles de Milankovitch (précession de l'ellipse + du pôle Nord).

2. Précession et magnétisme, spectroscopie RMN [28]

2.1 Spin nucléaire de l'hydrogène

NOTES Rappels sur le moment cinétique quantique. [27]

Moment cinétique orbital : $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$.

Composantes :

$$L_x = yp_z - zp_y$$

$$L_y = zp_x - xp_z$$

$$L_z = xp_y - yp_x$$

Règle de correspondance : $\mathbf{p} = -i\hbar\nabla$, donc $\mathbf{L} = -i\hbar\mathbf{r} \times \nabla$.

Commutations :

$$[\mathbf{L}_x, \mathbf{L}_y] = i\hbar\mathbf{L}_z$$

$$[\mathbf{L}_y, \mathbf{L}_z] = i\hbar\mathbf{L}_x$$

$$[\mathbf{L}_z, \mathbf{L}_x] = i\hbar\mathbf{L}_y$$

Opérateur carré : $\mathbf{L}^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$ et $[\mathbf{L}^2, L_x] = [\mathbf{L}^2, L_y] = [\mathbf{L}^2, L_z] = 0$.

En coordonnées sphériques,

$$L_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi}$$

est beaucoup plus simple que L_x ou L_y .

Quantification : puisque les commutateurs sont nuls, il existe trois ensembles de fonctions propres Y communes aux paires \mathbf{L}^2, L_x ... On choisit celles de \mathbf{L}^2 et L_z :

$$\mathbf{L}^2 Y(\theta, \varphi) = \hbar^2 \lambda Y(\theta, \varphi) \quad (4.1)$$

$$L_z Y(\theta, \varphi) = \hbar \mu Y(\theta, \varphi) \quad (4.2)$$

On sépare les variables, on écrit l'équation différentielle, le calcul donne : $\Phi(\varphi) = C e^{i\mu\varphi}$. Or Φ dérivable implique $\Phi(2\pi) = \Phi(0) \implies e^{2i\mu\pi} = 1 \implies \mu \in \mathbb{Z}$.

On s'intéresse aux noyaux atomiques de moment cinétique de spin \mathbf{S} non nul associé au moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$. Les deux moments, qui sont quantifiés, sont liés par le facteur gyromagnétique du noyau : $\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{S}$, où γ peut être positif ou négatif.

Le moment cinétique de spin d'un noyau d'hydrogène (spin $S = 1/2$) peut se trouver dans $2S + 1 = 2$ états quantiques.

Leur énergie d'interaction avec un champ magnétique extérieur s'écrit :

$$E_+ = +\frac{1}{2}\gamma\hbar B_0$$

$$E_- = -\frac{1}{2}\gamma\hbar B_0$$

Le champ extérieur lève la dégénérescence. La différence d'énergie est $\Delta E = \gamma\hbar B_0$ associée à une fréquence de transition $\nu = \gamma B_0$.

2.2 Précession du spin nucléaire autour d'un champ fixe

Le proton de moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ et moment cinétique en O \mathbf{L}_O constitue le noyau des atomes d'hydrogène. Les moments $\boldsymbol{\mu}$ et \mathbf{L} sont liés par la relation : $\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{L}$ où γ est le *facteur gyromagnétique* du proton.

On plonge le proton dans un champ magnétique $\mathbf{B}_0 = B_0 \mathbf{e}_z$. Le théorème du moment cinétique dans \mathcal{R} en O s'écrit :

$$\left. \frac{d\mathbf{L}_O}{dt} \right|_R = \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}_0 \implies \left. \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} \right|_R = \gamma \boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}_0 = -\gamma \mathbf{B}_0 \times \boldsymbol{\mu}$$

Cette relation permet d'affirmer que $\boldsymbol{\mu}$ décrit un cône autour du vecteur \mathbf{B}_0 à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}_0 = -\gamma\mathbf{B}_0$ dite fréquence de LARMOR, qui est propre à l'atome d'hydrogène pour un champ magnétique donné.

To-Do Bien comprendre pourquoi le cône, voir [64] et [28]

2.3 Mouvement et champ magnétique apparent dans un référentiel tournant

Alors, dans un référentiel tournant à la vitesse $\boldsymbol{\Omega}_0$, la rotation de $\boldsymbol{\mu}$ peut être annulée. Plus généralement, dans un référentiel \mathcal{R}' tournant à une vitesse $\boldsymbol{\Omega}$ collinéaire à $\boldsymbol{\Omega}_0$, on peut écrire :

$$\left. \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \gamma\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}_0 - \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{\mu} = \gamma\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}'_0$$

où $\mathbf{B}'_0 = \mathbf{B}_0 + \boldsymbol{\Omega}/\gamma$ est le champ magnétique perçu dans \mathcal{R}' . Alors :

$$\left. \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \gamma\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{B}'_0$$

permet encore de dire que $\boldsymbol{\mu}$ décrit un cône autour du vecteur \mathbf{B}'_0 à la vitesse angulaire : $\boldsymbol{\Omega}'_0 = -\gamma\mathbf{B}'_0 = \boldsymbol{\Omega}_0 - \boldsymbol{\Omega}$. Mais si les deux vitesses angulaires sont égales, ce mouvement de précession est nul.

To-Do [28] fait une analogie avec un astronaute dans l'ISS qu'il faut comprendre.

2.4 Mouvement en présence d'un champ tournant

Lorsque l'on ajoute un champ $\mathbf{b}_1 \parallel \mathbf{e}_i \perp \mathbf{e}_z$ fixe dans \mathcal{R}' on peut écrire :

$$\left. \frac{d\boldsymbol{\mu}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} = \mathbf{0} + \gamma\boldsymbol{\mu} \times \mathbf{b}_1$$

ce qui permet de dire que $\boldsymbol{\mu}$ décrit un cône autour de \mathbf{b}_1 à la vitesse angulaire $\boldsymbol{\Omega}_1 = -\gamma\mathbf{b}_1$.

Py-Do Faire le schéma de [28] et prévoir une animation python.

L'application de ce champ pendant une durée $t = \frac{\pi/2}{\Omega_1}$ va aligner $\boldsymbol{\mu}$ dans la direction \mathbf{e}_j de sorte que le moment magnétique soit perpendiculaire à $\mathbf{e}_{\mathbf{B}_0}$.

Cette impulsion permet donc d'écarter le moment magnétique de sa position d'équilibre (le long de \mathbf{e}_z) vers une position orthogonale (le long de \mathbf{e}_j).

2.5 Mesure dans le plan du champ tournant

Dans le référentiel \mathcal{R} du laboratoire, le moment magnétique se trouve maintenant dans le plan Oxy , et précesse autour de \mathbf{e}_z . Une bobine parallèle à Oyz va pouvoir mesurer la composante selon \mathbf{e}_x du champ magnétique créé par les variations sinusoïdales de $\boldsymbol{\mu}$ dans cette direction.

2.6 Mouvement des noyaux d'une population de molécules

Toute l'analyse en RMN est possible car le facteur gyromagnétique γ^j d'un noyau j (donc sa fréquence de LARMOR Ω^j) dépend de son environnement électronique. Des atomes d'hydrogène H^j d'environnements chimiques e^j différents vont donc s'aligner dans Oxy et produire un champ mesurable par la bobine pour des vitesses de rotation de \mathbf{b}_1 différentes.

Le mouvement des moment magnétique des noyaux de fréquence de LARMOR $\Omega^j \neq \Omega$ se calcule lui aussi.

To-Do Terminer avec le schéma de [28] et une animation.

LP 5 : Lois de conservation en dynamique

ARISTOTE pensait que pour qu'il y ait un mouvement, il fallait des forces. NEWTON à corrigé cela en disant que les forces sont là pour modifier le mouvement. L'erreur d'ARISTOTE semble naturelle dans la mesure où, sur Terre, des forces « invisibles » dissipatives stoppent systématiquement les objets qui se déplacent.

1. Lois de conservation

On considère une particule en M de quantité de mouvement \mathbf{p} sur lesquels s'appliquent des forces de résultante \mathbf{F} évoluant dans un référentiel galiléen dans lequel on place un repère fixe, d'origine O . On définit le rayon vecteur : $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$.

1.1 Quantité de mouvement

La seconde loi de NEWTON énonce que :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

Si le vecteur \mathbf{F} est nul, alors la quantité de mouvement \mathbf{p} est constante, on dit qu'elle est conservée. \mathbf{F} peut être nul si aucune force ne s'exerce sur le système, ou si les forces qui s'y exercent se compensent. Autrement, pour $\mathbf{F} \neq \mathbf{0}$, la seconde loi de NEWTON est en accord avec cette observation : les forces modifient le mouvement.

1.2 Moment cinétique

MANIP' Sur coussin d'air barycentre et angle avec deux mobiles liés.

Le moment cinétique s'écrit :

$$\mathbf{L}_O \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

En dérivant cette écriture par rapport au temps on obtient :

$$\frac{d\mathbf{L}_O}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Le moment cinétique est conservé si le produit vectoriel du membre de droite est nul, c'est à dire si :

$$\{\mathbf{F} = \mathbf{0} \quad \text{ou} \quad \mathbf{r} \parallel \mathbf{F}\} \iff \mathcal{M}_O(\mathbf{F}) = 0$$

1.3 Énergie mécanique

On considère le vecteur $\mathbf{r}(t)$ et le vecteur $\mathbf{r}(t + dt)$, dont la différence donne le vecteur $d\mathbf{l} = \mathbf{v} \cdot dt$.

Le travail des forces exercées sur la particule évoluant sur une trajectoire de A à B s'écrit :

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{l}$$

Cette première égalité semble indiquer un cas singulier puisque certaines forces peuvent s'exprimer sous la forme : $\mathbf{F}_c(M) = -\nabla E_p \iff \int_A^B \mathbf{F}_c \mathbf{dl} = E_p(M)|_A^B$. Ces forces sont dites *forces conservatives* ou *forces dérivant d'un potentiel*. Nous examinerons leur cas dans un instant.

Reprenons :

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot \mathbf{dl} = \int_A^B \frac{d\mathbf{p}}{dt'} \cdot \mathbf{v} dt' = \int_A^B m \frac{d\mathbf{v}}{dt'} \cdot \mathbf{v} dt' = \int_A^B m \mathbf{v} \cdot d\mathbf{v} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 \Big|_A^B = \Delta E_c$$

Nous venons d'établir le théorème de l'énergie cinétique.

Notons désormais \mathbf{F}_c la résultante des forces conservatives appliquées sur la particule \mathbf{F}_{nc} la résultante des autres forces, et reprenons le calcul :

$$W = \int_A^B (\mathbf{F}_c + \mathbf{F}_{nc}) \cdot \mathbf{dl} = - \int_A^B \nabla E_p \mathbf{dl} + \int_A^B \mathbf{F}_{nc} \mathbf{dl} = -\Delta E_p + W_{nc}$$

Finalement,

$$\Delta E_c = -\Delta E_p + W_{nc} \implies \Delta(E_m \equiv E_c + E_p) = W_{nc}$$

Il vient qu'en l'absence de forces non conservatives l'énergie mécanique est une grandeur conservée, l'appellation *forces conservatives* est ainsi justifiée.

Les forces non conservatives sont des forces qui vont modifier l'énergie mécanique de notre particule, elles peuvent être *motrices* si leur travail est positif : elles font *gagner* de la quantité de mouvement dans le cas contraire elles font perdre de la quantité de mouvement.

La différence fondamentale entre forces conservatives et forces non conservatives est que le travail des forces non conservatives pour un déplacement de A à B dépend du chemin suivi, alors que celui des forces conservatives n'en dépend pas. On donne comme bon exemple de force non conservatives les forces de frottements. Dans un véhicule elles sont compensées par des forces motrices générées par le moteur utilisant du carburant. Pour aller d'ici à la pièce voisine, la quantité de carburant consommée ne sera pas la même si j'y vais directement ou si je passe par TOKYO.

2. Intérêt des lois de conservations

Les lois de conservations permettent de résoudre des problèmes de mécanique sans intégrer les équations du mouvement.

2.1 Choc élastique

2.2 Pendule ballistique

2.3 Diffusion de RUTHERFORD

2.4 Problème de KÉPLER

2.5 Le pendule : portrait de phases sans calculs

Pour aller plus loin

To-Do | Problème à 3 puis n corps.

To-Do | Bref récapitulatif sur la mécanique lagrangienne. Théorème de Emmy NOETHER.

LP 6 : Cinématique relativiste

1. Origines de la relativité restreinte

1.1 Référentiel galiléen, principe de relativité

Dès 1687, le principe fondamental de la dynamique énoncé par NEWTON permet de distinguer deux types de référentiels. Dans les référentiels galiléens le principe s'exprime sous sa forme la plus simple, alors que dans les autres il nécessite des termes correctifs. Son expression mathématique, couplée aux transformations de GALILÉE, permet d'affirmer que si un référentiel est galiléen, le principe fondamental de la dynamique s'applique dans tous les référentiels en translation rectiligne uniforme par rapport au premier. Autrement dit, les lois de la mécanique sont invariantes entre deux référentiels galiléens.

Cette dernière affirmation constitue le *principe de relativité*. Un autre principe, ou plutôt une hypothèse, si naturelle qu'on ne la précise jamais en mécanique, est la suivante : la durée perçue entre deux événements, par deux observateurs dans deux référentiels différents, est la même.

1.2 La question de la propagation de la lumière

La propagation de la lumière à travers de nombreux milieux et notamment à travers le milieu interstellaire, posait un problème conceptuel aux physiciens jusqu'au XVII^e siècle. Pour harmoniser ce problème avec la propagation des ondes mécaniques l'idée d'un milieu de propagation appelé *ether luminifère* fut avancée. Ce milieu doit répondre à de nombreuses propriétés que nous n'étudions pas ici hormis celle de son mouvement par rapport à la matière : l'éther est-il entraîné ou non par la matière autour de laquelle il se trouve ?

Considérons une lampe (un haut-parleur) au milieu d'un wagon de train, un observateur O_t dans le train, et un observateur O_g sur le quai de la gare. À l'instant $t = 0$ la lampe (le haut-parleur) émet un signal vers l'avant et vers l'arrière, et le train démarre. Peu de temps après, ce signal arrive sur les murs du wagon.

1.2.1 Ether entraîné par le train

L'observateur O_t va constater que les deux signaux arrivent en même temps après une durée mesurable. Puisque la durée perçue entre deux événements par deux observateurs dans deux référentiels différents est la même, l'observateur O_g doit lui aussi constater que les deux signaux arrivent en même temps. Mais comme dans son référentiel les murs du train se déplacent, le signal allant vers l'avant aura parcouru une distance plus longue que celui allant vers l'arrière.

Dans le cas du signal sonore, nous expliquons ce phénomène simplement : la vitesse du son n'est pas la même dans les deux référentiels dans les deux directions, elle est liée à la vitesse de l'air qui se déplace avec le wagon.

Dans le cas du signal lumineux, nous pouvons avancer des hypothèses : soit la vitesse de

la lumière est elle aussi liée au train, soit elle est infinie.

La première hypothèse ne correspond pas à l'observation dite d'*aberration des étoiles*.

MÉDIA [./documents/stellarAberrationVersusTheDraggedAether.gif](#)

La seconde hypothèse ne correspond pas aux expériences qui mettent en évidence une vitesse de la lumière finie (RØMER la mesure en 1675).

1.2.2 Ether immobile par rapport à la gare

Une autre explication au phénomène lumineux est qu'en fait, les signaux lumineux n'arrivent pas en même temps sur les murs du train ni pour O_t ni pour O_g . La vitesse de la lumière pourrait être liée à la gare. Pourquoi la gare ? Cette question restera sans réponses car nous allons généraliser directement, en disant plutôt qu'il existe un référentiel dans lequel la vitesse de la lumière est la même dans toutes les directions, c'est le référentiel de l'éther.

Nous entrons en contradiction avec le principe de relativité qui ne distingue pas de référentiel galiléen particulier, mais tenons une hypothèse réfutable. Le Soleil et les autres étoiles sont manifestement immobiles entre eux, et l'aberration des étoiles indique que la Terre se déplace par rapport à l'éther. Il nous faut trouver une expérience qui permette de vérifier si la vitesse de la lumière mesurée sur Terre diffère entre la direction colinéaire à la vitesse de la Terre, et la direction qui y est orthogonale.

1.3 L'expérience de MICHELSON-MORLEY [33]

MÉDIA http://www.feynmanlectures.caltech.edu/img/FLP_I/f15-02/f15-02_tcbig.svgz

Si l'appareil est au repos dans l'éther, les temps mis par la lumière pour parcourir les chemins (BCB) et (BEB) doivent être égaux. Mais si l'appareil est en mouvement dans l'éther à la vitesse u vers la droite, les temps mis pour parcourir les chemins $(BC'B')$ et $(BE'E)$ seront différents et nous observerons sur l'écran des interférences. (Les temps nécessaires à parcourir (AB) et (BD) ou (BF) sont identiques quelque soit l'état de mouvement.)

Soit $t_{BE'}$ le temps mis par la lumière pour aller de B au miroir E . Pendant que la lumière parcourt ce trajet, l'interféromètre se déplace dans l'éther d'une distance $ut_{BE'}$ de sorte que le miroir E se trouve en E' , la lumière parcourt donc la distance

$$L + ut_{BE'} = ct_{BE'} \implies t_{BE'} = \frac{L}{c - u}$$

Pendant le chemin du retour $(E'B')$ l'interféromètre avance encore de sorte que la lumière doit parcourir une distance

$$L - ut_{E'B'} = ct_{E'B'} \implies t_{E'B'} = \frac{L}{c + u}$$

Finalement,

$$t_{BE'B'} = \frac{2L/c}{1 - u^2/c^2}$$

Concernant le trajet de la lumière sur l'axe vertical du schéma, la question de pose de savoir si la lumière va « rater » ou non le centre du miroir C . Nous savons que dans un référentiel galiléen la lumière ne le raterait pas, le principe de relativité nous permet donc de conclure que dans le référentiel de la Terre en mouvement rectiligne uniforme dans l'éther, la lumière ne rate pas non plus le centre du miroir. La lumière va parcourir un trajet oblique sur le schéma.

Soit alors $t_{BC'}$ le temps mis par la lumière pour aller de B au miroir C , comme avant, pendant que la lumière parcourt ce trajet le miroir C avance jusqu'en C' (distance $ut_{BC'}$). Nous avons un triangle rectangle où le théorème de PYTHAGORE s'applique :

$$(ct_{BC'})^2 = L^2 + (ut_{BC'})^2 \implies t_{BC'} = \frac{L}{\sqrt{c^2 - u^2}}$$

La distance $C'B'$ est la même, alors $t_{C'B'} = t_{BC'}$ et :

$$t_{BC'B'} = \frac{2L/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}$$

Cette expérience réalisée par MICHELSON et MORLEY doit donc permettre de mettre en évidence le mouvement de la Terre à travers l'éther via le déphasage des ondes lumineuses introduit par la différence de marche :

$$\delta = c\Delta t = c(t_{BE'B'} - t_{BC'B'}) \approx \frac{Lu^2}{c^2}$$

Les deux physiciens réalisèrent l'expérience deux fois (1881 et 1889) avec des interféromètres dont les bras mesuraient $L_1 = 1$ m, ($L_2 = 10$ m), ils s'attendaient donc à une différence de marche de $\delta_1 \approx 10$ nm ($\delta_2 \approx 100$ nm) soit un déphasage :

$$\Delta\varphi_1 = 2\pi \frac{\delta_1}{\lambda} \approx 0,12 \text{ rad} \quad \text{et} \quad \Delta\varphi_2 \approx 1,2 \text{ rad}$$

Ces déphasages doivent être observables.

PYTHON `./python/michelson-morley-anim.py`

Mais MICHELSON et MORLEY n'observèrent pas ce qu'ils attendaient : l'expérience n'indiquait aucune interférence, aucune différence de temps, et la vitesse de la Terre au travers de l'éther ne put être mise en évidence.

1.4 La force de LORENTZ et les équations de MAXWELL

Deux autres problèmes du même type existait. D'une part, les équations de MAXWELL s'expriment :

$$\left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right) \mathbf{B} = \mathbf{0}$$

La vitesse de la lumière apparaît clairement dans ces équations, sans qu'à aucun moment la question du référentiel d'étude ne soit soulevée.

D'autre part, la force de LORENTZ s'exprime, dans le principe fondamental de la dynamique :

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$$

or dans cette expression, l'accélération \mathbf{a} ne dépend pas du référentiel galiléen choisit alors que la vitesse \mathbf{v} en dépend.

C'est LORENTZ qui en cherchant à résoudre ces deux problèmes, fonda les bases mathématiques sur lesquelles la théorie d'EINSTEIN va reposer.

1.5 EINSTEIN pose les principes de la relativité restreinte

Les idées en physiques étaient coincées, l'hypothèse de l'éther était manifestement en désaccord avec les expériences. La vitesse de la lumière semblait ne pas dépendre du référentiel d'observation, ce qui entre en contradiction avec le principe de relativité et les transformations de galilée.

Justement, LORENTZ qui cherchait à résoudre les problèmes discutés plus haut, calcula quel types de transformations étaient nécessaire à garder les équations de MAXWELL et la force de LORENTZ invariantes par changement de référentiel. Ces transformations, que nous allons étudier maintenant, eurent du mal à être acceptées en raison des paradoxes qu'elles soulèvent. Mais EINSTEIN eu l'odace de les accepter malgré tout.

Il posa des nouveaux principes, les principes de la relativité restreinte :

- La vitesse de la lumière, dans le vide, est la même dans tous les référentiels galiléens.
- Toutes les lois de la physique sont les mêmes dans tous les référentiels galiléens.

L'acceptation de ces principes est équivalente à l'acceptation des transformations de LORENTZ.

2. Les transformation de Lorentz

2.1 Contraintes imposées par les deux postulats [62]

Objectif de rendre invariantes les équations de Maxwell. Distance parcourue par un rayon dans deux référentiels donnent les transformation de Lorentz.

2.2 Conséquences [62]

Perte de la simultanéité; invariance de l'intervalle (definition, genre, cône de lumière), dilatation du temps, contraction des longueurs : calcul du temps de vie des muons.

LP 7 : Dynamique relativiste

1. Outils de la dynamique relativiste

1.1 Quadrivecteur énergie-impulsion

On aura vu, en cinématique relativiste, qu'un évènement doit être repéré par un quadrivecteur position $\mathbf{X} = (ct, x, y, z)$ et que la vitesse d'un point dans un référentiel \mathcal{R} doit s'exprimer comme $\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{X}}{d\tau}$ avec τ le temps propre perçu par ce point dans son référentiel \mathcal{R}_i .

L'outil de base de la dynamique newtonienne est le principe fondamental de la dynamique

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}$$

si l'on veut étudier des mouvements en mécanique relativiste, il va être nécessaire d'adapter le principe pour le rendre invariant lors d'un changement de référentiel selon les transformations de LORENTZ, de manière à vérifier le principe de relativité. La mécanique classique repose également sur la conservation de l'énergie pour laquelle on peut écrire :

$$dE = \mathbf{F}\mathbf{v}dt$$

Nous allons utiliser le formalisme des quadrivecteurs, et sommes soumis à quelques contraintes :

- À basse vitesse, nous devons retrouver la mécanique classique.
- La nouvelle équation doit être invariante par transformations de LORENTZ.
- Les grandeurs conservées en mécanique classique (p et E) doivent être conservées.

Nous partons des relations précédentes :

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} \quad \text{et} \quad dE = \mathbf{F}\mathbf{v}dt$$

qui ensemble donnent :

$$dE = \frac{d\mathbf{p}}{dt}\mathbf{v}dt \implies \frac{dE}{c}cdt - d\mathbf{p}d\mathbf{r} = 0$$

on reconnaît ici la norme dans l'espace de MINKOWSKI d'un quadrivecteur s'écrivant :

$$\mathbf{P} = (E/c, \mathbf{p})$$

Nous l'appelleront quadrivecteur énergie-impulsion. La norme au carré du quadrivecteur s'écrit et vaut :

$$\|\mathbf{P}\|^2 = m^2c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}$$

on remarque que, étant donné le caractère d'invariant relativiste de la norme, la masse m est elle aussi, un invariant relativiste. En outre, on tire une expression pour l'énergie :

$$E^2 = m^2c^4 + \mathbf{p}^2c^2$$

Enfin, la question des particules sans masse se pose :

$$\mathbf{P}_{\text{photon}} = (E/c, \mathbf{p}) \quad \text{d'où} \quad \left(\frac{E}{c}\right)^2 - \mathbf{p} \cdot \mathbf{p} = 0 \implies E = cp$$

Remarquons que :

- Dans la limite de la mécanique classique, pour $v \ll c$, la partie spatiale de \mathbf{P} correspond à l'impulsion de la mécanique de NEWTON $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$.
- Pour une particule au repos, on écrit $E = mc^2$ autrement dit, même au repos, la particule porte une énergie.

1.2 Conservations et d'invariances en dynamique relativiste

La norme d'un quadrivecteur est un invariant relativiste. Par ailleurs, la conservation de l'énergie et la conservation de la quantité de mouvement, vont être utiles dans plusieurs problèmes. Il va se trouver que beaucoup de problèmes peuvent déjà être résolus avec ces deux seules propriétés.

2. Utilisation de la dynamique relativiste

2.1 Effet COMPTON (1927)

L'expérience de COMPTON consiste envoyer un photon (en rayons X) sur un électron dans un collisionneur, et d'observer ce qui en ressort. Un détecteur de photons et un détecteur d'électrons permettent de réaliser l'expérience.

To-Do Faire un schéma!

Puisque les composantes du quadrivecteur sont conservées, écrivons les (après avoir multiplié par c) :

$$\begin{cases} \hbar\omega + mc^2 = \hbar\omega' + E' \\ \hbar\omega + 0 = \hbar\omega' \cos \theta + p'c \cos \varphi \\ 0 + 0 = \hbar\omega' \sin \theta - p'c \sin \varphi \\ 0 + 0 = 0 + 0 \end{cases}$$

On en déduit :

$$(p'c)^2 = (\hbar\omega - \hbar\omega' \cos \theta)^2 + (\hbar\omega' \sin \theta)^2$$

et avec $E'^2 = m^2c^4 + (p'c)^2$, les calculs vont donner, avec $\omega = 2\pi c/\lambda$:

$$\lambda' - \lambda = \frac{\hbar}{mc}(1 - \cos \theta)$$

Ce qui est vérifié expérimentalement par COMPTON pour toutes les valeurs de θ . Lors du choc le photon cède une partie de son énergie à l'électron.

2.2 Topographie par émission de positrons (PET-Scan)

Un pan de la médecine nucléaire repose sur la collision entre une particule (électron) et son antiparticule (positron).

On injecte au patient un traceur radioactif. Il s'agit d'une molécule dont le premier rôle va être de se fixer sur les tissus que l'on souhaite imager : les cellules cancéreuses par exemple consomment beaucoup de glucose, alors une molécule qui en est biologiquement proche sera captée par ces cellules (et va s'y accumuler car n'est pas consommable). Ensuite, l'imagerie repose sur la détection à distance de la position des traceurs grâce à leur radioactivité. Le fluorodesoxyglucose marqué au fluor 18 est radioactif de type β^+ , lorsqu'il se désintègre, le fluor donne de l'oxygène 18, un positron, et un neutrino électronique ($p^+ \rightarrow n + e^+ + \nu_e$).

Lorsqu'il rencontre un électron des tissus organiques avoisinants (distance de l'ordre du millimètre), le positron va s'annihiler avec l'électron et produire deux photons gamma, capables de traverser le corps humain, qui partent dans la même direction mais le sens opposé. Les deux photons, ensemble, permettent, par mesure du temps mis à rejoindre les détecteurs, de déterminer précisément la position de la désintégration et donc, de la cellule cancéreuse.

To-Do | Raconter plus de choses, ordre de grandeur comparé aux autres méthodes, autre désintégration du fluor 18, quarks, ...

3. Collision inélastique : limite GZK

LP 8 : Notion de viscosité d'un fluide, écoulement visqueux

Niveau PC

Prérequis Statique des fluides Cinématique des fluides Dérivée particulaire et terme convectif

Dans cette leçon nous étudions une partie de la dynamique des fluides.

1. Introduction : expérience illustrative [44]

Considérons un fluide initialement au repos entre deux cylindres que l'on met en mouvement à des vitesses de rotations différentes à l'instant $t = 0$. Nous écrivons de manière qualitative un bilan de forces exercées sur une particule fluide pour prévoir sa dynamique avec la seconde loi de NEWTON. Nous connaissons :

- les forces de pression, $\mathbf{f}_p = -\nabla P d\tau$
- les forces volumiques (dont fait partie le poids), $\mathbf{f}_v d\tau$

Une écriture volumique du principe fondamental de la dynamique est :

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla P + \mathbf{f}_v$$

MANIP' Écoulement de COUETTE cylindrique

L'expérience met en évidence un phénomène que nous n'avons pas prévu : le fluide a été mis en mouvement autour de l'axe vertical, alors que nous n'y appliquons aucune force volumique. Nous pouvons observer plusieurs points :

- le fluide a été mis en mouvement de proche en proche,
- le fluide au contact de la paroi mobile se déplace à la même vitesse que cette dernière.

Il semble juste d'en déduire qu'il existe une force tangentielle, assimilable à des frottements, entre les couches cylindriques de fluide. Cette force manque dans notre description précédente, elle va être caractérisée par une propriété du fluide appelée *viscosité*.

2. Notion de viscosité [16]

2.1 Force de viscosité

Nous allons décrire cette viscosité avec un modèle d'expérience similaire à celle présentée mais plus simple à mettre en équation.

PYTHON `./python/ecoulement_couette.py`

NOTES

L'intérêt de l'expérience étudiée ici est la géométrie qui permet l'utilisation naturelle d'un repère cartésien. L'intérêt du dispositif cylindrique est l'absence de bords.

On considère un fluide homogène incompressible (en fait un suffit d'un écoulement incompressible, à température fixe) maintenu entre deux plaques horizontales solides planes et parallèles perpendiculaires à \mathbf{e}_y séparées d'une distance a . La plaque du bas est fixe dans le référentiel d'étude, alors que la plaque du haut est animée d'une vitesse $\mathbf{v} = \overrightarrow{cst}$ selon \mathbf{e}_x : elle va entraîner le fluide. On suppose le champ de pression uniforme et une invariance du problème par translation selon \mathbf{e}_z . On étudie le problème en régime stationnaire établi suite à un temps de régime transitoire.

Vu les symétries et invariances le champ de vitesses va s'écrire comme :

$$\mathbf{v}(x, y, z) = v_x(x, y)\mathbf{e}_x$$

On considère dans ce fluide deux particules (point de vue de LAGRANGE) situées l'une au dessus de l'autre ; notre expérience a montré qu'il existait entre ces particules une force tangentielle au déplacement. On admet (en PC) que la force exercée par la particule du haut sur la particule du bas dite *force de viscosité* s'exprime comme :

$$d\mathbf{F}_{h \rightarrow b} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS \mathbf{e}_x \quad \text{et évidemment :} \quad d\mathbf{F}_{b \rightarrow h} = -d\mathbf{F}_{h \rightarrow b} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dS \mathbf{e}_x$$

Cette expression est empirique mais on peut réfléchir à sa signification :

- la force augmente si la différence de vitesse entre les deux particules est plus grande
- la force augmente pour des particules de surface plus importante
- si la différence de vitesse selon \mathbf{e}_y change de sens la force change de sens
- si les deux particules ont la même vitesse la force est nulle
- le coefficient η est un coefficient de proportionnalité entre la force les deux autres paramètres

Ce coefficient η est caractéristique du fluide et appelée *viscosité dynamique*, son unité est le pascal seconde (symbole Pa s) historiquement appelé poiseuille. On peut donner des ordres de grandeur pour η , mais ce coefficient dépend de la pression et de la température.

Fluide	Viscosité dynamique η (Pa s)
Air	$1,8 \times 10^{-5}$
Eau	$1,0 \times 10^{-3}$
Glycérine	0,80

MÉDIA

Graphes $\eta_{\text{eau}}(T)$: http://gpip.cnam.fr/ressources-pedagogiques-ouvertes/hydraulique/res/viscositeEau_vs_T.png

2.2 Équivalent volumique de la force de viscosité

On connaît maintenant la force exercée par une particule sur une autre particule. Dans le fluide sous cette description en géométrie cartésienne, chaque particule de fluide est

en contact avec 6 autres particules, cherchons alors à réexprimer le bilan des forces de viscosité exercées sur celle du centre.

Si l'on considère une particule fluide en forme de pavé droit comprise dans un volume $dx dy dz$, elle est soumise aux forces de viscosité de la part de ses voisines en y et $y + dy$. Ces forces s'expriment :

$$d\mathbf{F}(y) = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dx dz \mathbf{e}_x \quad \text{et} \quad d\mathbf{F}(y + dy) = \eta \frac{\partial v_x}{\partial y} dx dz \mathbf{e}_x$$

leur somme donne :

$$d\mathbf{F}(y) + d\mathbf{F}(y + dy) = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy dx dz \mathbf{e}_x = \eta \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} d\tau \mathbf{e}_x \equiv d\mathbf{f} d\tau$$

pour les écoulement à 3 dimensions, on généralise cette expression de la force volumique de viscosité avec le laplacien :

$$d\mathbf{f} = \eta \nabla^2 \mathbf{v}$$

To-Do | En écrivant $\rho D\mathbf{v}/Dt = \eta \nabla^2 \mathbf{v}$ on trouve l'équation de diffusion de quantité de mouvement : $\partial v / \partial t = \eta / \rho \nabla^2 v$.

3. Dynamique des fluides

3.1 Équation de NAVIER-STOKES

L'équation de NAVIER-STOKES résulte du principe fondamental de la dynamique appliqué à la particule fluide, pour un fluide newtonnien en écoulement incompressible ; on l'admet en classe de PC :

$$\rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \underbrace{(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}}_{\text{conv}} \right) = -\nabla P + \underbrace{\eta \nabla^2 \mathbf{v}}_{\text{diff}} + \mathbf{f}_v$$

To-Do | Lire [16, chap. 15, 2.2, p. 400] pour la signification des deux termes mis en évidence ici.

Les deux termes convectif et diffusif qui apparaissent dans l'équation la rendent difficile à résoudre en effet, le premier la rend dépendante de v^2 et le second la rend dépendante d'une dérivée seconde.

Cette équation n'admet pas de solutions analytique (problème du milénaire). Pour poursuivre notre étude de la dynamique des fluides, nous allons chercher à mieux la comprendre pour pouvoir négliger l'un ou l'autre de ces termes.

3.2 Caractérisation des écoulements

On décide de caractériser l'écoulement par le rapport, appelé *nombre de REYNOLDS* :

$$Re = \frac{\text{conv}}{\text{diff}} = \frac{\|\rho(\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v}\|}{\|\eta \nabla^2 \mathbf{v}\|}$$

on peut estimer en ordres de grandeur que :

$$\rho(\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} \propto \frac{\rho U^2}{L} \quad \text{et} \quad \eta\nabla^2\mathbf{v} \propto \eta\frac{U}{L^2}$$

d'où pour le nombre de REYNOLDS :

$$R_e = \frac{\rho UL}{\eta}$$

Si $R_e \ll 1$ le terme convectif est dominant, alors que dans le cas contraire le terme diffusif est dominant. Cette caractérisation peut sembler arbitraire mais on remarque expérimentalement que les écoulements à bas R_e (< 2000) sont toujours laminaires, alors que les écoulements à haut R_e (> 2000) sont toujours turbulents.

To-Do Donner des ordres de grandeur et parler de possibles transitions entre les régimes [16, chap. 15, 3.4, p. 405].

To-Do Montrer des images d'écoulements laminaire et turbulents.

Dans le cadre de cette leçon qui porte sur la viscosité nous allons continuer avec des écoulements pour lesquels le nombre de REYNOLDS est bas.

4. Écoulement de POISEUILLE [16]

Il s'agit d'un écoulement qui présente une importance particulière en ingénierie puisqu'il décrit l'écoulement de fluides dans des conduites.

4.1 Profil de vitesse

4.2 Perte de charge, chute de pression

To-Do Particulièrement en avant dans le BO de PSI.

Pour aller plus loin

Dans la suite de cette leçon nous pouvons étudier d'autres géométries d'écoulements. En particulier, les écoulements qui se font *autour* d'un obstacle. On pourra alors parler de la force de traînée, qui est le résultat des forces de viscosité exercées par le fluide sur l'obstacle. La chute d'une bille dans un milieu visqueux est un bel exemple qui permet de mesurer la viscosité du fluide.

Suite à cette leçon nous pourrions introduire la notion d'écoulement parfait pour lequel les phénomènes associés à la viscosité sont négligeables. On introduit alors la notion de *couche limite* zone dans laquelle la viscosité n'est justement pas négligeable. L'équation d'EULER qui décrit les écoulements parfaits permettra d'arriver aux équations de BERNOULLI qui permettent d'expliquer le fonctionnement de dispositifs comme le débitmètre de VENTURI, ou le tube de PITOT.

LP 9 : Modèle de l'écoulement parfait d'un fluide

Préreq : Cinématique des fluides, Navier-Stockes

Rq : Ne pas mettre la viscosité en prérequis, pour mieux ne pas en parler. Donc changer la première partie. L'équation d'Euler s'applique très bien à la plupart des écoulements.

1. Écoulement parfait

1.1 Rappels

NOTES

Eq. de Navier-Stockes.

Nombre de Reynolds. On se place à $Re \approx 1$ (écoulement laminaire) dans cette leçon.

Couche limite : zone où $Re \ll 1$, diffusion de la quantité de mouvement. Ordre de grandeur de l'épaisseur max de la couche dans un écoulement de Couette - plan fini. (type voiture qui roule où la CL est négligeable ; et type canalisation où elle ne l'est pas)

1.2 Équation d'Euler

1.2.1 Hypothèses

1.2.2 Équation d'Euler

2. Relation de Bernoulli

2.1 Énoncé

Rel mathématique utilisé.

Réécriture de NS.

Écriture le long d'une ligne de courant.

Relation de Bernoulli.

2.2 Application

Effet Venturi.

LP 10 : Phénomènes interfaciaux impliquant des fluides

Niveau L3

Prérequis Énergie interne Potentiels thermodynamiques

MANIP' Trombonne dans l'eau : existence d'une force à la surface.

Cadre avec film de savon : diminution des surfaces.

Deux gouttes d'eau sur deux surfaces : elles n'ont pas la même forme.

Dans cette leçon, nous étudions les *interfaces* : il s'agit de régions de l'espace où plusieurs phases sont en contact. Par un modèle simple nous expliquerons les phénomènes physiques mis en jeu dans les manips précédentes. Autre chose à noter, en lien avec ce sujet : en chimie on lit les volumes « au bas du ménisque », mais pourquoi le liquide monte-t-il aux parois ?

1. La tension superficielle

1.1 Origine physique

1.1.1 Description énergétique [24] [20]

On considère un liquide sur réseau, constitué de $N_x \cdot N_y \cdot N_z$ molécules de taille a ; entre chaque paire de molécules voisines existe une énergie liante $-\epsilon < 0$.

Pour calculer l'énergie du liquide, on le découpe en tranches de $N_y \cdot N_z$ molécules. L'une de ces tranches interagit avec ses deux voisines par une énergie $-\epsilon N_y N_z$, puisqu'il y a $(N_x - 1)$ paires de tranches alors l'ensemble de ces tranches implique une énergie d'interaction $-\epsilon(N_x - 1)N_y N_z$. En découpant de manière similaire le liquide selon les deux autres axes, on calcule une énergie d'interaction :

$$\begin{aligned} E &= -\epsilon((N_x - 1)N_y N_z + (N_y - 1)N_x N_z + (N_z - 1)N_x N_y) \\ &= -\epsilon(3N_x N_y N_z - N_y N_z - N_x N_z - N_x N_y) \end{aligned}$$

En notant $V = a^3 N_x N_y N_z$ le volume du liquide, et $\Sigma = 2a^2(N_x N_y + N_y N_z + N_x N_z)$ sa surface, on obtient :

$$E = -\epsilon \left(\frac{3V}{a^3} - \frac{\Sigma}{2a^2} \right) = -\frac{3\epsilon}{a^3} V + \frac{\epsilon}{2a^2} \Sigma$$

on constate que $\frac{\partial E}{\partial \Sigma} > 0$: les molécules à la surface manquent d'énergie liante par rapport à celles du volume. Autrement dit, augmenter la surface du liquide coûte de l'énergie. En conséquence, un système physique isolé d'autres interactions et étant stable dans les états d'énergies minimales, va minimiser sa surface.

To-Do Revenir sur les expériences introductives : trombonne, cadre.

Notons que pour un volume donné la sphère est la forme géométrique qui minimise la surface : les gouttes d'eau isolées ou pseudo-isolées (par exemple dans l'ISS) adoptent une forme sphérique.

L'énergie de tension superficielle $\gamma = \frac{\epsilon}{2a^2} > 0$ dépend des interactions inter-moléculaires :

Liaison	ϵ (eV)	Liquide	γ (mJ m ⁻²)
VAN DER WAALS	0,02	Huile	20
Hydrogène	0,5	Eau	72
Métallique	1	Mercure	500

Cette énergie contribue à l'énergie interne des systèmes thermodynamiques. Elle est souvent négligée car le terme de volume domine, mais dans certains systèmes sa contribution est importante.

1.1.2 Description dynamique [20]

On sait maintenant qu'il faut apporter de l'énergie pour ajouter des molécules à la surface. Cela revient à fournir un travail, donc une force. Pour augmenter la surface de $d\Sigma$, on doit fournir le travail $\delta W = \gamma d\Sigma$. Considérons un exemple simple :

To-Do Baguette de verre [20], film de savon : $\delta W = F dx = 2\gamma l dx = 2\gamma d\Sigma$.

1.2 Loi de Laplace [26]

Comme mentionné plus haut, la l'énergie superficielle contribue à l'énergie interne des systèmes thermodynamiques.

Considérons alors une goutte d'eau sphérique de rayon R (volume V , surface Σ) évoluant dans une atmosphère à la pression P_0 thermostatée à la température T_0 . La différentielle de l'énergie interne U s'écrit :

$$dU = \gamma d\Sigma - PdV + TdS$$

On montre que l'enthalpie libre externe :

$$G_0 = U + P_0V - T_0S$$

agit comme potentiel thermodynamique pour l'étude de ce système. Sa différentielle s'exprime :

$$\begin{aligned} dG_0 &= \gamma d\Sigma - (P - P_0)dV + (T - T_0)dS \\ &= \gamma 2\pi R dR - (P - P_0)4\pi R^2 dR + (T - T_0)dS \\ &= 2\pi[\gamma - 2(P - P_0)R]R dR + (T - T_0)dS \end{aligned}$$

Alors à l'état d'équilibre $dG_0 = 0$ donc :

$$\left. \frac{\partial G_0}{\partial S} \right|_R = 0 \quad \text{et} \quad \left. \frac{\partial G_0}{\partial R} \right|_S = 0$$

donc, $T = T_0$ et :

$$P - P_0 = \frac{2\gamma}{R} > 0$$

La pression dans la goutte est supérieure à la pression ambiante, mais diminue lorsque R augmente.

MANIP' Bulles de savon reliées, penser à faire la différence entre bulle et goutte.

2. Mouillage

2.1 Types de mouillage

Total, partiel, nul. Angle de description.

2.2 Loi de Young-Dupré

Bilan des forces [20] sans définir S . Comparer les γ et discuter de l'angle. Ne pas oublier la réaction du support.

3. Capillarité

3.1 Longueur capillaire [6]

Nous avons ici discuté de gouttes sphériques, en avançant que la sphère était la forme la plus stable. Pourtant, nous observons que toutes les gouttes ne sont pas sphériques. Notre modèle présentait la tension superficielle comme seule énergie potentielle, mais sur Terre la gravité joue un rôle important, voyons sur quel ordre de grandeur elle est en effet négligeable.

On considère une goutte sphérique de masse volumique uniforme, baignant dans l'atmosphère de masse volumique uniforme dans laquelle la pression obéit à la loi de l'hydrostatique.

To-Do Faire le schéma de [].

3.2 Forme des gouttes

3.3 Méniques

3.4 Loi de Jurin

LP 11 : Gaz réels, gaz parfait

Dans le modèle du gaz parfait on se place sous les hypothèses suivantes :

- les particules sont ponctuelles
- hormis des chocs, les particules n'interagissent pas

cela permet d'aboutir à l'équation d'état des gaz parfaits :

$$PV = nRT = NkT$$

mais les hypothèses du modèle, bien que simplificatrices, semblent peu réalistes. D'ailleurs, l'expérience montre parfois des écarts avec l'équation d'état des gaz parfaits.

To-Do Lesquels ?

L'objectif de cette leçon est de mener une étude similaire à celle faite sur les gaz parfaits mais en modifiant les hypothèses pour les rendre plus proches de l'idée qu'on se fait de la réalité. On verra que le traitement mathématique est plus lourd mais que les résultats sont plus conformes à l'expérience : c'est ce qui nous importe le plus.

1. Un regard critique sur les hypothèses du gaz parfait

1.1 Volume des particules

1.2 Interaction entre les particules

Les particules dans un gaz interagissent entre elles par des interactions électrostatiques et gravitationnelles. L'expérience montre que le potentiel d'interaction entre deux particules peut-être modélisé par la forme empirique :

$$u_p(\rho) = u_0 \left[\left(\frac{d}{\rho} \right)^{12} - \left(\frac{d}{\rho} \right)^6 \right]$$

où u_0 et d sont des constantes d'ajustement, ce potentiel porte le nom de potentiel de LENNARD-JONES.

Le terme en puissance 6 est attractif et dominant à grande distance : il correspond aux interactions de cohésion du milieu. Le terme en puissance 12 est répulsif et dominant à courte portée : il correspond aux chocs qui empêchent les particules de partager une même zone de l'espace.

2. Théorie cinétique des gaz [25] [57]

2.1 Formalisme statistique : fonction de partition

On choisit de décrire un ensemble de particules classiques (mécanique newtonienne, pas de spin) dans l'ensemble canonique : le système de volume V contient N particules et

est en contact et en équilibre avec un thermostat de température T . Les particules sont identiques de masse m et très nombreuses $N \gg 1$.

L'énergie interne du système s'écrit :

$$E(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^N \left[\frac{1}{2} m \mathbf{v}_i^2 \right] + E_p(\mathbf{r})$$

où $E_p(\mathbf{r})$ correspond à la somme des énergies potentielles de toutes les particules : prendre $E_p = 0$ revient à faire l'hypothèse du gaz parfait.

La description du système dans le cadre de la physique statistique va permettre de définir et calculer les grandeurs thermodynamiques habituelles : T , P , F , U , S , μ à partir de $E(\mathbf{r}, \mathbf{v})$. On rappelle ici que toutes ces grandeurs s'expriment simplement avec la fonction de partition du système :

$$Z \equiv \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \int \dots \int e^{\frac{-1}{kT} E(\mathbf{r}, \mathbf{v})} d^{3N} \mathbf{r} d^{3N} \mathbf{v}$$

Les résultats connus sur le gaz parfait permettent de calculer une partie de Z :

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{N!} \frac{1}{h^{3N}} \int \dots \int e^{\frac{-1}{kT} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m \mathbf{v}_i^2} d^{3N} \mathbf{v} \int \dots \int e^{\frac{-1}{kT} E_p(\mathbf{r})} d^{3N} \mathbf{r} \\ &= \frac{1}{N!} \left(\frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{\frac{3N}{2}} \int \dots \int e^{\frac{-1}{kT} E_p(\mathbf{r})} d^{3N} \mathbf{r} \\ &= Z_{GP} \int \dots \int e^{\frac{-1}{kT} E_p(\mathbf{r})} d^{3N} \mathbf{r} \end{aligned}$$

pour déterminer Z on doit donc préciser $E_p(\mathbf{r})$.

2.2 Énergie potentielle due aux interactions

2.2.1 Énergie potentielle de paires

On a déjà discuté du potentiel de LENNARD-JONES qui donne l'énergie potentielle d'interaction entre deux particules. Dans notre formalisme il s'écrit :

$$u_p(\rho) = u_p(\|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j\|) = u_p(\rho_{ij})$$

On pourra considérer que l'énergie totale due aux interactions correspond à la somme des énergies d'interactions de paires :

$$E_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i}^N u_p(\rho_{ij})$$

mais cette écriture fait l'hypothèse que les particules se rencontrent souvent à deux et rarement à trois, quatre ou plus [25, chap. III. G. II. 1. 2].

2.2.2 Approximation de champ moyen

Étant donné le nombre important de particules le calcul précédent devient difficile à mener. S'il est possible de le faire réaliser par un ordinateur on propose ici une approximation de champ moyen.

On considère la particule 1, son énergie potentielle est :

$$e_{p,1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}) = \sum_{j \neq 1}^N u_p(\rho_{1j})$$

Les $N-1$ autres particules sont réparties dans le volume de manière uniforme en moyenne, on considère alors que l'énergie $e_{p,1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r})$ ne dépend que de \mathbf{r}_1 , et pas de \mathbf{r} :

$$e_{p,1}(\rho_{1j}) = e_{p,1}(\mathbf{r}_1) \quad \text{alors} \quad E_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N e_{p,i}(\mathbf{r}_i)$$

Comme on peut faire un raisonnement identique pour toutes les particules, nous allons pouvoir poser fonctionnellement : $e_p = e_{p,i}$ le potentiel de champ moyen (mais $e_p(\mathbf{r}_1) \neq e_p(\mathbf{r}_2)$).

Reprenons le calcul de la fonction de partition :

$$\begin{aligned} Z &= Z_{GP} \int \dots \int e^{\frac{-1}{kT} E_p(\mathbf{r})} d^{3N} \mathbf{r} \\ &= Z_{GP} \prod_{i=1}^N \left(\iiint e^{\frac{-1}{2kT} e_p(\mathbf{r}_i)} d^3 \mathbf{r}_i \right) \\ &= Z_{GP} \left[\iiint e^{\frac{-1}{2kT} e_p(\mathbf{r}_1)} d^3 \mathbf{r}_1 \right]^N \end{aligned}$$

Il se factorise en une forme plus simple car les N intégrales sur $d^3 \mathbf{r}_i$ sont identiques, en particulier à celle sur $d^3 \mathbf{r}_1$. Nous devons encore donner une forme au potentiel de champ moyen e_p .

2.2.3 Forme du potentiel de champ moyen

Notre forme pour $E_p(\mathbf{r})$ vient de l'approximation selon laquelle la particule i voit l'ensemble des autres particules comme réparties uniformément. En conséquence, mis à part sur les bords, l'énergie potentielle qu'elle ressent devrait être uniforme : $e_p(\mathbf{r}_1) = e_0 = \text{cste}$ et dans ce cas l'intégrale \iiint donne un nombre proportionnel au volume V .

Seulement nous voulons tenir compte des effets à très courtes distances entre particules issus du potentiel de LENNARD-JONES.

Pour modéliser la forte répulsion existante lorsque la particule 1 s'approche trop près d'une autre particule, on considère que la valeur de $e_p(\mathbf{r}_1)$ devient infinie dans une région délimitée autour des autres particules. C'est-à-dire que l'intégrale \iiint va donner un nombre proportionnel à un volume $V - V_{ex}$, la quantité V_{ex} correspondant au volume, dit

volume exclu, interdit à la particule 1 en raison des répulsions :

$$\begin{aligned}
 Z &= Z_{GP} \left[\iiint_V e^{\frac{-1}{2kT} e_p(\mathbf{r}_1)} d^3 \mathbf{r}_1 \right]^N \\
 &= Z_{GP} \left[\iiint_{(V-V_{ex})} e^{\frac{-e_0}{2kT}} d^3 \mathbf{r}_1 \right]^N \\
 &= Z_{GP} \left[(V - V_{ex}) e^{\frac{-e_0}{2kT}} \right]^N
 \end{aligned}$$

Les grandeurs V_{ex} et e_0 sont à déterminer. On peut le faire expérimentalement, mais un raisonnement [25, 57] sur la notion de *volume exclu* montrera que :

- V_{ex} est lié à ρ_1 le premier zéro de $u(\rho)$, potentiel de LENNARD-JONES,
- e_0 est lié à la forme de $u(\rho)$.

2.3 Grandeurs thermodynamiques

3. Transition liquide-gaz

LP 12 : Premier principe de la thermodynamique

La thermodynamique est une science qui a été introduite lors de la révolution industrielle. Elle traite des échanges d'énergies et de l'évolution des systèmes d'un état d'équilibre vers un autre en généralisant le théorème de l'énergie cinétique. Le premier principe de la thermodynamique justifie l'impossibilité de créer des machines à mouvement perpétuel, recherchées à cette période de l'histoire des sciences.

To-Do Voir si la première partie ne doit pas aller en prérequis.

1. Énergie interne d'un système thermodynamique

1.1 Énergie totale d'un système [16]

Un système physique (quel qu'il soit) contient de l'énergie, qui peut se manifester sous différentes formes.

$$E_{totale} = E_{c,macro} + E_{pot,ext} + U_{\text{énergie interne}}$$

Le terme d'énergie interne contient :

- l'énergie cinétique de toutes les particules qui composent le système par rapport au centre de masse du système
- les énergies potentielles d'interactions entre toutes les particules
- ...

Pour calculer $E_{c,macro}$ et $E_{pot,macro,ext}$ on divise le système en éléments de volumes mésoscopique et on somme les énergie de ces éléments.

Il est beaucoup trop difficile d'évaluer U en considérant chacune des 10^{23} particules qui composent le système, mais on sait qu'elle peut se calculer à partir des variables d'état.

Cela dit, il est parfois tout aussi compliqué de déterminer la forme fonctionnelle de la fonction d'état $U = f(P, V, T, N, \dots)$. Toutefois, une étude du système permet facilement de déterminer les variations de son énergie lorsqu'il subit une transformation.

1.2 Variation d'énergie interne d'un système thermodynamique

Puisqu'il y a plusieurs contributions à l'énergie d'un système thermodynamique, il y a plusieurs manières de la faire varier. Les énergies cinétique macroscopique et potentielle extérieure s'expriment comme en mécanique classique et varient selon les mêmes procédés.

L'énergie interne $U(P, V, T, N)$ peut varier de différentes manières, lorsque ses variables changent de valeurs.

Exemples :

- On chauffe un récipient fermé indéformable rempli d'eau : on apporte de l'énergie thermique et la température augmente.
- On compresse un volume d'air maintenu à température constante dans un piston : on apporte du travail (énergie mécanique), la pression augmente.

Dans ces deux cas, l'augmentation de T ou P va se traduire par une augmentation de l'énergie interne du système. On notera les échanges d'énergie thermique Q , et W_{nc} le travail des forces non conservatives exercées par l'extérieur sur le système.

Ces deux grandeurs sont algébriques car le système peut recevoir ou donner de l'énergie thermique et du travail. La convention est alors de prendre des valeurs positives quand le système reçoit de l'énergie, et négatives quand il en cède.

1.3 Capacité thermique à volume constant

Pour un système fermé qui subit une transformation à volume constant, on définit sa capacité thermique à volume constant :

$$C_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_{V,n} = \begin{cases} 3/2 nR & \text{pour un gaz parfait monoatomique} \\ 5/2 nR & \text{pour un gaz parfait diatomique} \\ mc_V & \text{pour les phases condensées} \end{cases}$$

To-Do Donner des valeurs, en particulier pour l'eau. Dire qu'on a parfois la valeur molaire ou massique tabulée.

2. Le premier principe de la thermodynamique

2.1 Énoncé

Le premier principe de la thermodynamique énonce que pour un système fermé, l'énergie interne (notée U) est extensive et est une fonction d'état, telle que au cours d'une transformations pendant laquelle il reçoit algébriquement une énergie thermique Q et un travail W :

$$\Delta E_{tot} = \Delta E_{c,macro} + \Delta E_{pot,ext} + \Delta U = W_{nc} + Q$$

Il s'agit d'un principe de conservation de l'énergie. Comme fonction d'état, U ne dépend que de l'état (d'équilibre) dans lequel se trouve le système.

2.2 Termes d'échange de travail : W_{nc}

Sources de travail :

- Forces de pression
- Travail d'une pompe
- Force électrochimique entre les molécules du système

Dans le cas des forces de pression (que l'on rencontrera souvent), la force de pression exercée par le milieu extérieur sur le système, qui voit son volume varier de V_i à V_f , fourni entre un travail :

$$W_p = - \int_{V_i}^{V_f} P_{ext} \cdot dV$$

où P_{ext} est la pression dans le milieu extérieur au voisinage du système. Si cette pression est constante alors :

$$W_p = -P_{ext}\Delta V$$

En particulier, si le système est à l'équilibre mécanique avec l'extérieur pendant toute la transformation ($P = P_{ext}$) alors : $W_p = -P\Delta V$ puis on peut écrire :

$$\Delta(U + PV) = W_p + Q$$

2.3 Exemple : échauffement d'un gaz par compression

[66, chap 24, 1.5 c)]

3. Une autre fonction d'état : l'enthalpie

Nous avons déjà établi, pour une transformation isobare : $\Delta(U + PV) = W_p + Q$. On constate que $U + PV$ est une fonction d'état (elle ne dépend que de variables d'état et est extensive [58]). On appelle cette grandeur enthalpie : $H = U + PV$, et on peut réécrire le premier principe comme :

$$\Delta E_{c,macro} + \Delta E_{pot,ext} + \Delta H = W_p + Q$$

Notons que dans le cas particulier des gaz parfaits, puisque $PV = nRT$, alors $H = U + nRT$.

3.1 Capacité thermique à pression constante

De manière similaire à l'énergie interne, on nomme la dérivée partielle de H par rapport à T , *capacité thermique à pression constante* :

$$C_P = \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_P = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_P + \left. \frac{\partial(PV)}{\partial T} \right|_P = \begin{cases} 5/2 nR & \text{pour un GP monoatomique} \\ 7/2 nR & \text{pour un GP diatomique} \\ mc_P \approx mc_V & \text{pour les phases condensées} \end{cases}$$

3.2 Intéret

L'intéret est qu'il n'y a pas besoin de calculer W_p , qui est déjà compté dans le terme ΔH . Si l'on chauffe un volume de gaz à pression constante, il va s'étendre et obéir au premier principe. Connaissant Q (l'énergie thermique apportée au gaz) et ΔV , on peut calculer ΔT . Mais si l'on connaît ΔH , alors on peut connaître ΔT sans connaître la variation de volume.

3.3 Exemple d'application

To-Do | Ajouter une application de [66], ou alors la détente de JOULES-KELVIN ([58]) avec le premier principe industriel qui permet d'aller plus loins.

LP 13 : Évolution et condition d'équilibre d'un système thermodynamique fermé

1. Le potentiel

1.1 Une notion de mécanique [26]

Les systèmes mécaniques initialement maintenus dans un état donné évoluent lorsqu'une contrainte est relâchée vers un autre état de sorte que leur énergie potentielle diminue. Ils atteignent un équilibre lorsque leur énergie potentielle atteint un extrémum. L'équilibre peut être stable, métastable, ou instable selon qu'il s'agisse d'un minimum global, d'un minimum local, ou d'un maximum.

La conservation de l'énergie assure que cette énergie potentielle a été dissipée par le système.

Un système masse-ressort initialement contraint dans une position étendue et baignant dans une atmosphère va osciller dès lors que l'on relâche la contrainte, convertissant énergie cinétique et énergie potentielle, avant de le rejoindre une position équilibre où l'énergie potentielle est minimale.

1.2 Une généralisation en thermodynamique [26] [58]

Les systèmes thermodynamiques sont soumis aux deux premiers principes :

$$\begin{aligned}\Delta U &= W + Q \\ \Delta S &= S_{\text{cr}} + S_{\text{ech}} \quad \text{avec} \quad S_{\text{cr}} \geq 0\end{aligned}$$

Un système fermé et isolé initialement contraint dans un état (I) pourra évoluer vers un état final (F) par création d'entropie, de sorte que l'inégalité $\Delta S \geq 0$ soit vérifiée.

Cette affirmation laisse entendre que l'on peut définir une fonction $-S$ appelée *négentropie* de sorte que l'évolution du système fermé et isolé soit contrainte par sa diminution : $\Delta(-S) \leq 0$. La négentropie joue alors un rôle similaire à l'énergie potentielle des systèmes mécaniques et on la qualifiera de potentiel thermodynamique.

Le système atteint un état d'équilibre stable lorsque sa négentropie est globalement minimale. Les équilibres peuvent être métastables en cas de minimum local, mais la thermodynamique ne prévoit pas d'équilibre instable car les fluctuations présentes à l'échelle microscopiques feraient spontanément sortir le système de cette situation.

Comme indiqué, la négentropie ne constitue un potentiel thermodynamique que pour les systèmes fermés et isolés. Mais nous allons voir que pour chaque système il est possible de trouver une fonction agissant comme potentiel.

2. Système fermé et indéformable, en contact avec un thermostat

2.1 Le potentiel [58]

Considérons un système fermé, indéformable, en contact avec un thermostat à la température T_0 qui est la seule source d'échange thermique. Le système contraint dans un état initial (I) est relâché et évolue vers un état final (F).

Les variables ajustables du système sont notées Y (variable conjuguée y) et la température du système T (variable conjuguée S) en fait partie.

To-Do Trouver un exemple de variables internes ajustables autre que la température dans ce type de transformation.

Les premier et second principes peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}\Delta U &= U_F - U_I = \mathcal{W} + Q \\ \Delta S &\geq Q/T_0\end{aligned}$$

D'où : $\Delta U \leq T_0 \Delta S$

On définit alors $F^* \equiv U - T_0 S$ de sorte que F^* agisse en potentiel thermodynamique pour le système :

$$\Delta F^* = \Delta(U - T_0 S) \leq 0$$

Remarquons que F^* dépend à la fois de l'état du système (via U et S) et de la température du thermostat (T_0) qui est un paramètre extérieur, pas une variable interne du système. Il ne s'agit donc pas d'une fonction d'état.

2.2 Condition d'équilibre [26] [58]

Le système atteindra un état d'équilibre lorsque la différentielle dF^* de F^* est nulle :

$$\begin{aligned}dF^* &= dU - T_0 dS = 0 \\ dU &= T dS - P d\mathcal{W} + Y dy \quad (\text{identité thermodynamique}) \\ \implies dF^* &= 0 = (T - T_0) dS + Y dy\end{aligned}$$

Cette dernière égalité donne la condition d'équilibre : $T = T_0$ et $Y = 0$.

To-Do Stabilité?

To-Do Traiter un exemple où Y apparait clairement.

2.3 Cas particulier d'un équilibre thermique avec le thermostat dans l'état initial et l'état final [58]

Dans le cas particulier où les états (I) et (F) sont des états d'équilibres thermiques avec le thermostat, alors les températures T_I et T_F des deux états vérifient : $T_I = T_0 = T_F$. Dans ce cas, la variation entre (I) et (F) de l'énergie libre du système $F = U - TS$ vérifie :

$$\Delta F = \Delta F^* = \Delta(U - TS)$$

Cette fois, le potentiel thermodynamique dont le rôle est *aussi* joué par la fonction d'état F ne dépend que de variables internes.

3. Système fermé déformable, en contact avec un thermostat et une atmosphère

3.1 La fonction F^* [58]

Dans cette situation, le système reçoit algébriquement un travail W et le premier principe s'écrit :

$$\Delta U = W + Q$$

D'où : $\Delta U \leq T_0 \Delta S + W$. Alors :

$$\Delta F^* \leq W$$

Si le système reçoit du travail ($W > 0$), alors F^* peut augmenter : il ne s'agit pas d'un potentiel thermodynamique pour les systèmes déformables.

Toutefois, si le système cède du travail ($W < 0$), et que le système est destiné à le récupérer, le travail *maximum récupérable* est :

$$0 < |W| \leq -\Delta F^* = F_I^* - F_F^*$$

La fonction F^* diminue au cours de la transformation, et sa diminution correspond au travail maximum que l'on peut récupérer. Avec un système adapté, on le récupère entièrement dans le cas d'une transformation réversible, et on n'en récupère qu'une partie dans le cas d'une transformation irréversible

F^* reste intéressante pour ces systèmes, même s'il ne s'agit pas d'un potentiel.

Le cas de la machine cyclique monotherme Puisque sur un cycle, $\Delta F^* = 0$ et $\Delta F^* \leq W$, alors forcément $W \geq 0$ pour ce cycle. Ce qui rend compte du problème théorique lié à ces machines longtemps cherchées par les inventeurs.

To-Do Préparer un document à projeter pour toute la suite de cette partie, puisque c'est très similaire à la précédente.

3.2 Le potentiel

Le système est semblable au précédent mais déformable et soumis à une pression P_0 par l'atmosphère qui est la seule source de travail.

Le travail des forces de pression s'écrit $W = -P_0 \Delta V$, ce qui permet de réexprimer l'inégalité sur ΔF^* :

$$\begin{aligned} \Delta F^* &\leq -P_0 \Delta V \\ \implies \Delta(F^* + P_0 \Delta V) &\leq 0 \end{aligned}$$

On définit alors $G^* \equiv U - T_0 S + P_0 V$ de sorte que G^* agisse en potentiel thermodynamique pour le système :

$$\Delta G^* = \Delta(U - T_0 S + P_0 V) = \Delta(F^* + P_0 V) \leq 0 \quad (13.1)$$

Là encore il faut remarquer que G^* n'est pas une fonction d'état du système puisque la fonction dépend de T_0 et P_0 .

3.3 Condition d'équilibre

Le système atteindra un état d'équilibre lorsque la différentielle dG^* de G^* est nulle :

$$\begin{aligned}dG^* &= dU - T_0 dS + P_0 dV = 0 \\dU &= T dS - P dV + Y dy \\ \implies dG^* &= 0 = (T - T_0) dS + (P_0 - P) dV + Y dy\end{aligned}$$

Cette dernière égalité donne la condition d'équilibre : $T = T_0$ et $P = P_0$ et $Y = 0$.

3.4 Cas particulier d'un équilibre thermique avec le thermostat et mécanique avec l'atmosphère dans l'état initial et l'état final

Cette fois, le potentiel thermodynamique dont le rôle est *aussi* joué par la fonction d'état énergie libre G ne dépend que de variables internes.

To-Do Lire [26, p 190, chap. 5, III.D.1] sur le choix du potentiel, et se préparer à discuter la notion de variables naturelles.

4. Un exemple : la pile DANIELL

MANIP' Montrer la pile !

To-Do Faire vérifier tout ça avant de raconter n'importe quoi...

On considère un système fermé, constitué :

- de cuivre solide $\text{Cu}(s)$
- de zinc solide $\text{Zn}(s)$
- d'ions cuivre en solution aqueuse $\text{Cu}^{2+}(aq)$
- d'ions zinc en solution aqueuse $\text{Zn}^{2+}(aq)$

où la réaction chimique $\text{Cu}^{2+}(aq) + \text{Zn}(s) = \text{Zn}^{2+}(aq) + \text{Cu}(s)$ est susceptible de se produire.

Les variations d'énergie interne de ce système s'écrivent :

$$\begin{aligned}dU &= T dS - P dV + E dq + \mu_{\text{Cu}} dn_{\text{Cu}} + \mu_{\text{Cu}^{2+}} dn_{\text{Cu}^{2+}} + \mu_{\text{Zn}} dn_{\text{Zn}} + \mu_{\text{Zn}^{2+}} dn_{\text{Zn}^{2+}} \\ &\implies \\ dG^* &= (T - T_0) dS - (P - P_0) dV + E dq + \mu_{\text{Cu}} dn_{\text{Cu}} + \mu_{\text{Cu}^{2+}} dn_{\text{Cu}^{2+}} + \mu_{\text{Zn}} dn_{\text{Zn}} + \mu_{\text{Zn}^{2+}} dn_{\text{Zn}^{2+}}\end{aligned}$$

où E est le potentiel entre les électrodes et q la charge électrique relative entre les électrodes.

NOTES La variable conjuguée à q est E car : puissance électrique $P = \frac{dU}{dt} = E i = E \frac{dq}{dt}$ donc $dU = E dq$.

avec les relations sur les quantités de matière et la charge :

$$\begin{aligned}d\xi &= dn_{\text{Cu}} = -dn_{\text{Cu}^{2+}} \\ &= dn_{\text{Zn}} = -dn_{\text{Zn}^{2+}} \\ &= dq/2\mathcal{F}\end{aligned}$$

d'où :

$$dG^* = (T - T_0)dS - (P - P_0)dV + (2E\mathcal{F} + \mu_{\text{Cu}} - \mu_{\text{Cu}^{2+}} - \mu_{\text{Zn}} + \mu_{\text{Zn}^{2+}})d\xi$$

à l'équilibre on aura, d'après la condition démontrée plus haut :

$$\begin{aligned}T &= T_0 \\P &= P_0 \\(2E\mathcal{F} + \mu_{\text{Cu}} - \mu_{\text{Cu}^{2+}} - \mu_{\text{Zn}} + \mu_{\text{Zn}^{2+}}) &= 0 \\ \implies E &= -\frac{\mu_{\text{Cu}} - \mu_{\text{Cu}^{2+}} - \mu_{\text{Zn}} + \mu_{\text{Zn}^{2+}}}{2\mathcal{F}}\end{aligned}$$

L'application numérique dans l'état standard ($P_0 = P^\circ$, $T_0 = T^\circ$, $c = c^\circ$) donne $E = 1,1 \text{ V}$ avec :

Espèce	Potentiel standard (kJ mol^{-1}) [71]
Cu(s)	0,00
Zn(s)	0,00
Cu ²⁺ (aq)	65,52
Zn ²⁺ (aq)	-147,03

LP 14 : Machines thermiques réelles

Une machine thermique est un système qui permet de convertir de l'énergie entre les formes thermique et mécanique. Dans une machine thermique, un fluide parcourt un chemin cyclique au cours duquel il subit plusieurs transformations thermodynamiques. Ces transformations ont lieu dans différentes parties de la machine, il peut s'agir d'échanger de l'énergie thermique avec une source chaude ou froide ou de l'énergie mécanique avec une turbine ou une pompe.

NOTES Faire attention à la différence entre *efficacité* et *rendement*.

1. Situation

On étudie une machine thermique cyclique ditherme, dont le fluide échange l'énergie thermique massique q_c avec une source chaude, l'énergie thermique massique q_f avec une source froide, le travail massique w avec un système extérieur. Suite à l'écriture des premier et second principe sur un cycle, l'inégalité de CLAUSIUS donne :

$$\frac{q_c}{T_c} + \frac{q_f}{T_f} \leq 0$$

Le diagramme de RAVEAU permet de distinguer quatre classes de machines thermiques, d'utilité différente :

MÉDIA https://fr.wikipedia.org/wiki/Fichier:Diagramme_de_Raveau.png

- i : $q_c > 0, q_f < 0, q_c + q_f = w < 0 \rightarrow$ moteur
- ii : $q_c > 0, q_f < 0, q_c + q_f = w > 0 \rightarrow$ système de refroidissement
- iii : $q_c < 0, q_f < 0, q_c + q_f = w > 0 \rightarrow$ sans intérêt
- iv : $q_c < 0, q_f > 0, q_c + q_f = w > 0 \rightarrow$ réfrigérateur

Nous allons nous intéresser à deux d'entre eux :

- Les moteurs sont des machines qui produisent du travail utilisable ($w < 0$).
- Les réfrigérateurs (ou pompe à chaleur) sont des machines qui transfèrent de l'énergie thermique d'une source froide ($q_f > 0$) vers une source chaude ($q_c < 0$), pour refroidir la source froide ou réchauffer la source chaude.

2. Moteur : cycle de RANKINE

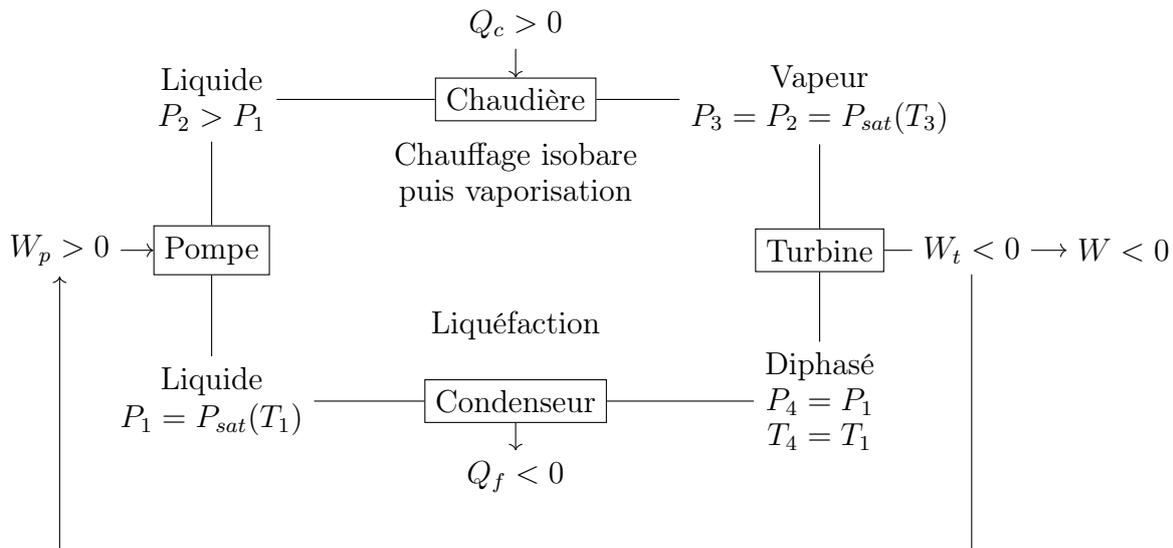
L'étude d'un cycle sans combustion se prête bien à une première découverte des machines thermiques réelles, puisqu'il n'y a pas de difficulté concernant la modélisation des sources chaude et froide.

Le cycle de RANKINE est utilisé dans le circuit d'eau secondaire des centrales nucléaires pour produire l'énergie électrique.

2.1 Cycle de fonctionnement

Le cycle se compose de quatre transformations :

- 1 : L'eau qui sort du condenseur est liquide, sous la pression P_1 saturante à la température T_2 .
- 1 \rightarrow 2 : Dans la pompe, l'eau liquide subit une petite augmentation de pression adiabatique réversible, sa température et sa pression ne varient quasiment pas.
- 2 \rightarrow 3 : L'eau passe dans la chaudière, sa température augmente jusqu'à sa température d'ébullition sous $P_2 = P_1$, puis elle s'évapore complètement de manière isobare.
- 3 \rightarrow 4 : Dans la turbine, la vapeur d'eau subit une détente adiabatique réversible jusqu'à P_1 et T_1 , une partie de l'eau se liquéfie.
- 4 \rightarrow 1 : Dans le condenseur, la vapeur d'eau restante se liquéfie de manière isobare sous la pression P_1 .



On s'intéresse à décrire ce cycle dans un diagramme (T, s) puis dans un diagramme (P, v) . Ils nous permettront de confronter ce cycle au cycle de CARNOT.

2.1.1 Diagramme entropique

Dans le diagramme (T, s) les isothermes sont des droites horizontales les isenthalpiques sont des droites verticales. Puisque pour une transformation isobare $ds = \frac{c_p}{T} dT$, alors :

$$s(T) = \int \frac{c_p}{T} dT = c_p \ln\left(\frac{T}{T_0}\right) \quad \text{d'où} \quad T \propto \exp\left(\frac{s}{c_p}\right)$$

les isobares sont des exponentielles. Connaissant les températures $T_1 = 30^\circ\text{C}$ et $T_2 = 300^\circ\text{C}$, on peut tracer le cycle :

MÉDIA `./documents/rankine_eau.svg`

2.1.2 Diagramme de CLAPEYRON

2.2 Efficacité

2.2.1 Efficacité de CARNOT

Pour le circuit secondaire d'une centrale nucléaire :

$$\eta_C = \left| \frac{W}{Q_c} \right| = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{30^\circ\text{C}}{300^\circ\text{C}} = 0.47$$

2.2.2 Efficacité réelle

$$\eta = \left| \frac{w}{q_c} \right| = \left| \frac{w_t - w_p}{q_c} \right|$$

Du premier principe on obtient :

$$\begin{aligned}w_p &= \Delta_{1 \rightarrow 2} h = h_2 - h_1 \approx 0 \\q_c &= \Delta_{2 \rightarrow 3} h = h_3 - h_2 \approx h_3 - h_1 \\w_t &= \Delta_{3 \rightarrow 4} h = h_4 - h_3\end{aligned}$$

Pour un circuit à eau, il est facile de trouver des valeurs tabulées d'enthalpie massique à pression et température données, on peut d'ailleurs lire des valeurs approchées sur le diagramme entropique présenté. Le tableau suivant regroupe les valeurs utiles issues de [42].

Température (°C)	Pression (kPa)	Enthalpie (kJ kg ⁻¹)		
		Liquide sat.	Évap.	Vapeur sat.
30	4,2	125,8	2430,5	2556,3
300	8581	1344,0	1404,9	2749,0

On lit : $h_1 = 125,8 \text{ kJ kg}^{-1}$, $h_3 = 2749,0 \text{ kJ kg}^{-1}$. La détermination de h_4 nécessite un calcul supplémentaire, puisque l'eau est dans un état biphasé en ce point. Sur le diagramme, on peut lire $x_4 = 0,65$, donc :

$$h_4 = x_4 h_{liq} + (1 - x_4) h_{vap} = 976,5 \text{ kJ kg}^{-1}$$

Finalement,

$$\eta = 0,37 \quad \text{et} \quad r = \frac{\eta}{\eta_C} = 0,88$$

3. Le réfrigérateur [66]

3.1 Cycle de fonctionnement

To-Do | Faire le schéma technique avec les pièces, se référer au schéma fait lors de la présentation de cette leçon, qui était très bien.

Le fluide *frigorigène* suit un circuit comportant :

- Un compresseur dans lequel il reçoit du travail sans échange thermique.
- Un condenseur dans lequel il est en contact avec la source chaude ($T_c = 20\text{ °C}$).
- Un détendeur dans lequel il ne reçoit ni travail ni énergie thermique.
- Un évaportaeur dans lequel il est en contact avec la source froide ($T_f = -5\text{ °C}$).

Py-Do | Trouver un fluide réel, faire le cycle dans plusieurs diagrammes, peut être dans python.

3.2 Efficacité de CARNOT

To-Do | Établir et discuter le sens physique de $\eta_C = \frac{T_f}{T_c - T_f}$, (η diminue avec T_f , et $T_f \rightarrow T_c \implies \eta \rightarrow \text{inf}$). Puis donner un ordre de grandeur à 4 K et 4 °C.

3.3 Efficacité réelle

Le diagramme enthalpique (T, H) permet de la lire facilement.

LP 15 : Transitions de phase

Prérequis Notions sur les changement d'états des corps purs Potentiels thermodynamiques

1. Évolution d'un corps pur lors d'un changement d'état

1.1 Potentiels thermodynamiques

On considère ici un corps pur dans des conditions expérimentales où la pression P et la température T sont fixées. Nous avons déjà vu que lors de l'étude d'un tel système thermodynamique la fonction enthalpie libre externe G^* renseigne à la fois sur les conditions d'équilibre et le sens d'évolution. Rappelons alors qu'elle est définie par :

$$G^* \equiv F^* + P_0V = U - T_0S + P_0V$$

et qu'elle varie selon :

$$\Delta G^* = \Delta(U - T_0S + P_0V) \leq 0$$

et que, pour des transformations où l'état initial et l'état final sont tous les deux des états d'équilibre thermique avec le thermostat, alors la fonction enthalpie libre :

$$G = U - TS + PV$$

joue *aussi* un rôle de potentiel thermodynamique, en plus d'être fonction d'état.

Comme notre système est diphasé il va être utile d'utiliser la propriété d'extensivité de l'enthalpie libre. On écrit alors G_s l'enthalpie libre de la phase solide et G_l l'enthalpie libre de la phase liquide, puis : $G = G_s + G_l$. On introduit les grandeurs molaires avec des notations usuelles de sorte que :

$$G(T, P, n) = n_s g_s(T, P) + n_l g_l(T, P)$$

NOTES

Attention, cette décomposition n'est possible lorsqu'on néglige les effets d'interactions au niveau de l'interface. On peut le faire pour un système où les deux phases sont séparées en deux grand volumes mais pas pour des mousses. Les énergies associées à la surface peuvent être liées à la tension de surface ou ...

1.2 Évolution et équilibre

1.2.1 Condition d'évolution

La condition d'évolution spontanée (ou d'équilibre) est donnée par :

$$\begin{aligned} dG \leq 0 &\implies g_s(T, P)dn_s + g_l(T, P)dn_l \leq 0 \\ &\implies [g_s(T, P) - g_l(T, P)]dn_s \leq 0 \end{aligned}$$

donc,

- si $g_s(T, P) > g_l(T, P)$ alors $dn_s < 0$: le liquide se solidifie ;
- si $g_s(T, P) < g_l(T, P)$ alors $dn_s > 0$: le solide fond ;
- éventuellement si $g_s(T, P) = g_l(T, P)$ alors le système est à l'équilibre : $T = T_{eq}$ et $P = P_{eq}$.

La notation des dépendances (T, P) est un peu lourde mais essentielle. La condition d'équilibre donnée par l'égalité des enthalpies libres molaires à T_{eq} et P_{eq} de l'expérience donne implicitement une relation $P_{eq} = f(T_{eq})$ qui, lorsqu'elle est vérifiée, correspond à l'état d'équilibre ; réciproquement, dans l'état d'équilibre elle est vérifiée.

1.2.2 L'enthalpie libre molaire

Nous avons introduit deux nouvelles grandeurs thermodynamiques pour décrire chaque sous-système. La condition d'évolution (ou d'équilibre) suggère que pour connaître l'état du système complet à une température et une pression données il faut comparer $g_s(T, P)$ à $g_l(T, P)$, seulement, nous n'avons aucune idée des valeurs que prennent ces grandeurs.

Leurs valeurs vont de toute façon être tabulées de sorte à ce qu'elles soient cohérentes avec l'étude que nous avons menée. Mais nous allons voir tout de suite que leurs dépendances à T et P ne sont pas arbitraires.

Pour la phase solide, les variations de l'enthalpie libre molaire g_s sont données par (on utilise les grandeurs molaires par extensivité) :

$$\begin{aligned}
 dg_s &= d(u_s - T_0 s_s + P_0 v_s) \neq du_s - T_0 ds_s + P_0 dv_s \\
 &= du_s - s_s dT_0 - T_0 ds_s + P_0 dv_s + v_s dP_0 \\
 &= du_s - s_s dT - T ds_s + P dv_s + v_s dP \quad (\text{quasi-statique}) \\
 &= T ds_s - P dv_s - s_s dT - T ds_s + P dv_s + v_s dP \quad (\text{id thermo}) \\
 &= -s_s dT + v_s dP
 \end{aligned}$$

Variation avec T_0 On fait varier la température extérieure T_0 , toute en assurant l'équilibre thermique $T = T_0$. Dans ce cas :

$$\frac{\partial g_s}{\partial T} = -s_s \quad \text{et} \quad \frac{\partial g_l}{\partial T} = -s_l$$

L'entropie molaire est :

- toujours positive,
- plus grande pour les liquides que les solides,

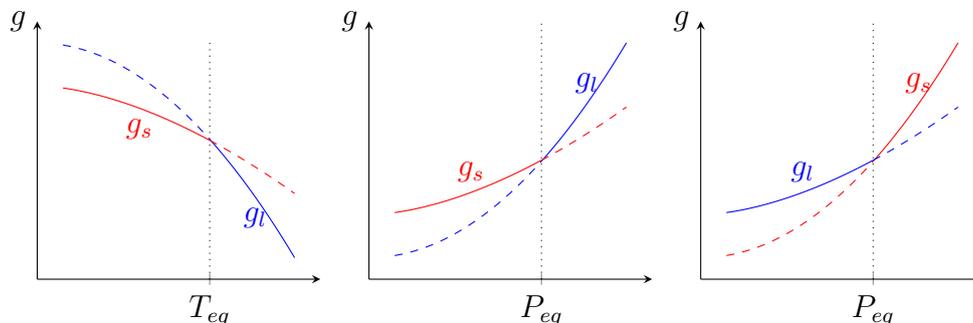
ce qui est résumé graphiquement ci-dessous. Comme le système évolue toujours vers l'état d'énergie libre minimale, la phase stable aux températures $T > T_{eq}$ est la phase liquide (et inversement).

Variation avec P_0 Le même calcul mais en faisant varier la pression extérieure P_0 va donner :

$$\frac{\partial g_s}{\partial P} = v_s \quad \text{et} \quad \frac{\partial g_l}{\partial P} = v_l$$

le volume molaire étant toujours positif, l'enthalpie libre molaire est croissante avec la pression. Le volume molaire de la phase liquide est *en général* plus grand que celui de la phase solide, mais ça n'est pas le cas de l'eau.

To-Do Calculer les dérivées secondes pour justifier la concavité/convexité des courbes !



1.2.3 Le diagramme de phases

Les graphes précédents permettent de déterminer laquelle des phases est stable à haute (ou basse) température ou à haute (ou basse) pression. Cela permet d'établir une ébauche du diagramme (P, T) de phases, mais nous pouvons facilement calculer la pente de la courbe d'équilibre. En effet, nous avons vu que l'équilibre est donné par $g_s(T_{eq}, P_{eq}) = g_l(T_{eq}, P_{eq})$ alors si l'on dérive par rapport à la température en restant sur la courbe :

$$\begin{aligned}
 g_s(T_{eq}, P_{eq}) &= g_l(T_{eq}, P_{eq}) \quad \text{avec} \quad P_{eq} = f(T_{eq}) \\
 \implies \frac{dg_s}{dT_{eq}} &= \frac{dg_l}{dT_{eq}} \\
 \implies \frac{\partial g_s}{\partial T_{eq}} + \frac{\partial g_s}{\partial P_{eq}} \frac{\partial P_{eq}}{\partial T_{eq}} &= \frac{\partial g_l}{\partial T_{eq}} + \frac{\partial g_l}{\partial P_{eq}} \frac{\partial P_{eq}}{\partial T_{eq}}
 \end{aligned}$$

en remplaçant les dérivées partielles par les expressions trouvées plus haut, on exprime la pente de la courbe d'équilibre :

$$-s_s + v_s \frac{\partial P_{eq}}{\partial T_{eq}} = -s_l + v_l \frac{\partial P_{eq}}{\partial T_{eq}} \implies \frac{\partial P_{eq}}{\partial T_{eq}} = \frac{s_l - s_s}{v_l - v_s} = \frac{|s_l - s_s|}{v_l - v_s}$$

c'est la relation de CLAPEYRON. On retrouve que la pente de la courbe d'équilibre dépend du signe de $v_s - v_l$ qui est *en général* négatif, mais pas pour l'eau.

1.3 Enthalpie de changement d'état

NOTES

Attention : contrairement à ce qui est annoncé ci dessous, l'équilibre n'est pas vérifié pour les changement d'états d'un équilibre métastable vers un équilibre stable (mais ne pas en parler, pour le pas compliquer). Dans le cas d'un liquide surfondu (glace à $T > 0^\circ\text{C}$) on aurait $g_l < g_s$ et pas l'égalité.

Tout au long du changement d'état l'équilibre est vérifié et $dG = 0$. Mais pour que le changement d'état ait lieu, il faut apporter ou extraire de l'énergie au système, considérons une liquéfaction (gaz vers liquide) pendant laquelle on extrait de l'énergie au

système. Pour nous la fournir le système en puise dans l'agitation thermique qui assure la « mauvaise » cohésion du milieu, c'est cela qui entraîne la variation d'entropie. Bien que l'enthalpie libre reste constante, l'enthalpie varie :

$$dH = dG + d(TS) = TdS$$

En somme, lorsque le changement d'état est réalisé complètement :

$$\Delta_{\text{liq}}H = T\Delta_{\text{liq}}S = Tn(s_l - s_v) = -Tn|s_v - s_l| < 0$$

ce changement d'état est endothermique, et on appelle *enthalpie molaire de vaporisation* la quantité positive $l_{\text{vap}} = T|s_v - s_l|$. On écrit alors, pour la solidification :

$$\Delta_{\text{liq}}H = -nl_{\text{vap}}$$

L'enthalpie molaire de liquéfaction nous renseigne sur la quantité d'énergie par unité de quantité de matière que l'on doit extraire du système pour transformer le liquide en gaz.

On peut s'intéresser à des ordres de grandeur et les comparer à des capacités thermiques molaires et remarquer que les changement d'états mettent en jeu beaucoup d'énergie :

Substance	M (g mol ⁻¹)	T (°C)	$c_{p,l}$ (J kg ⁻¹ K ⁻¹)	l_{vap} (J kg ⁻¹)	$c_{p,g}$ (J kg ⁻¹ K ⁻¹)
Eau	18	100	4216	2257×10^3	2078
Ethanol	115	79	5159	855×10^3	2899

On définit aussi la grandeur associée, *entropie molaire de solidification* :

$$\Delta_{\text{liq}}h = h_l - h_v = T(s_l - s_v) \implies \Delta_{\text{liq}}s = \frac{\Delta_{\text{liq}}h}{T}$$

NOTES

L'enthalpie molaire de changement d'état l dépend de la température T_{eq} ou de la pression $P_{eq} = f(T_{eq})$.

To-Do

Donner des ordres de grandeur. Donner un graphe $l_{\text{vap}}(T)$?

To-Do

On peut reprendre la formule de CLAPEYRON :

$$\frac{\partial P_{eq}}{\partial T_{eq}} = \frac{\Delta h}{T\Delta v} = \frac{l}{T\Delta v}$$

Près du point critique (courbe liquide gaz) on dirait que $\partial P_{eq}/\partial T_{eq}$ tends vers l'infini car les volumes molaires sont de plus en plus proches. Mais il se trouve que les entropies molaires et les enthalpies molaires le sont aussi. Donc il n'y a pas de discontinuité, mais la courbe d'équilibre liquide gaz cesse d'être définie, et l'enthalpie de changement d'état est nulle.

1.4 Deux types de transitions

To-Do | Les changements d'état sont du premier ordre, la transition vers le fluide supercritique est du deuxième ordre.

MÉDIA | Une expérience intéressante sur la transition supercritique : <https://www.youtube.com/watch?v=jMfDB0g8ibY>

2. Une autre transition

LP 16 : Facteur de BOLTZMANN

La physique statistique dans l'ensemble microcanonique permet l'étude de système isolés et fermés. Dans cette leçon nous généralisons vers des systèmes qui peuvent échanger de l'énergie thermique avec un thermostat.

1. Loi de BOLTZMANN

1.1 Systèmes

On considère un thermostat τ de température T_τ d'énergie interne E_τ , en contact avec le système s de température $T = T_\tau$ d'énergie interne E . Le thermostat est constitué d'un nombre de particules grand devant celui du système ($N_\tau \gg N$). Puisque l'énergie interne de chaque système est extensives, on pourra dire que $E_\tau \propto N_\tau \gg N \propto E$.

L'ensemble $\mathcal{S} = \{s \cup \tau\}$ est isolé, et a une énergie interne $E_S = E + E_\tau$.

1.2 Thermostat

La température microcanonique T_τ^* du thermostat s'exprime par :

$$\frac{1}{T_\tau^*} = \left. \frac{\partial S_\tau(E_\tau = E_S - E)}{\partial E_\tau} \right|_V \approx \left. \frac{\partial S_\tau(E_S)}{\partial E_\tau} \right|_V - E \left. \frac{\partial^2 S_\tau(E_S)}{\partial E_\tau^2} \right|_V \approx \left. \frac{\partial S_\tau(E_S)}{\partial E_\tau} \right|_V$$

on en déduit que T_τ^* est indépendante de l'énergie du système s : le thermostat peut échanger de l'énergie thermique avec s sans que sa température ne varie.

1.3 Statistique

Notons (l) , (λ) les états microscopiques de s , τ à l'énergie E_l , E_λ . Le système \mathcal{S} est décrit par la donnée d'un état (l, λ) d'énergie $E_S = E_l + E_\lambda$. Comme ce système est isolé, nous pouvons l'étudier à travers une description microcanonique, et ainsi dire que la probabilité de trouver \mathcal{S} dans un microétat (l, λ) est :

$$\mathbb{P}_{(l, \lambda)} = \frac{1}{\Omega_S(E_S = E_l + E_\lambda)}$$

alors en relachant la contrainte explicite sur l'état (λ) de τ , la probabilité de trouver \mathcal{S} dans un état où s est dans un microétat (l) d'énergie E_l (par conservation de l'énergie, τ est dans un état quelconque d'énergie $E_S - E_l$) est :

$$\mathbb{P}_{(l)} \equiv \mathbb{P}_{(l, \{\forall(\lambda) | E_\lambda = E_S - E_l\})} = \Omega_\tau(E_S - E_l) \frac{1}{\Omega_S(E_S)}$$

Vu l'expression statistique de l'entropie nous pourrions écrire :

$$\mathbb{P}_{(l)} = \frac{e^{\frac{S_\tau(E_S - E_l)}{k_B}}}{\Omega_S(E_S)} \approx \frac{e^{\frac{S_\tau(E_S)}{k_B}} \cdot e^{-\frac{E_l}{k_B} \frac{\partial S_\tau(E_S)}{\partial E_\tau}}}{\Omega_S(E_S)} = \frac{e^{\frac{S_\tau(E_S)}{k_B}}}{\Omega_S(E_S)} \cdot e^{-\frac{E_l}{k_B T}} = \frac{1}{Z} e^{-\frac{E_l}{k_B T}}$$

Le dernier facteur est le *facteur de BOLTZMANN*, la grandeur Z dans le premier est la *fonction de partition* qui dépend de toutes les contraintes externes.

- À température fixée, la probabilité de trouver un système dans un microétat d'énergie E_l suit une loi en exponentielle décroissante.
- Une augmentation de la température favorise la probabilité de trouver le système dans un microétat de plus haute énergie.

La probabilité de trouver le système dans un macroétat d'énergie E_L est :

$$\mathbb{P}(E_L) \equiv \mathbb{P}_{\{\forall(l)|E_l=E_L\}} = \Omega_s(E_L) \frac{e^{-E_L/k_B T}}{Z}$$

2. Expérience de Jean PERRIN (1908) [60]

Physicien français au début des années 1900, Jean PERRIN consacre une partie de ses travaux à la vérification de l'hypothèse atomique alors controversée. Il cherche à déterminer le nombre d'Avogadro \mathcal{N}_A par plusieurs méthodes expérimentales, espérant trouver des valeurs cohérentes.

L'une des méthodes repose sur l'observation de particules sphériques de caoutchouc végétal en suspension dans une haute éprouvette remplie d'eau et laissée au repos. PERRIN a constaté qu'il se réalise un état de régime permanent dans lequel la concentration en *sphérules* décroît avec la hauteur. Expliquons ce phénomène.

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à une sphérule donne :

$$\mathbf{F} = m_s \mathbf{g} + \boldsymbol{\pi} = (\rho_s - \rho_u) \frac{4\pi r_s^3}{3} \mathbf{g}$$

On pourra exprimer l'énergie potentielle de la particule à l'altitude z :

$$E_p(z) = - \int_0^z \mathbf{F} \mathbf{e}_z dz' = (\rho_s - \rho_e) \frac{4\pi r_s^3}{3} g z$$

En ne considérant que l'énergie potentielle, et vu les résultats de la partie précédente, la probabilité de trouver la particule dans un macroétat d'énergie $E_p(z)$ s'exprime :

$$\mathbb{P}(E_p(z)) = \frac{\Omega}{Z} e^{-E_p(z)/k_B T}$$

où Ω correspond au nombre de microétats tels que la particule se trouve à l'altitude z . En considérant N_0 particules identiques et indépendantes, le nombre de particules à l'altitude z s'exprime :

$$N(z) = \frac{N_0 \Omega}{Z} e^{-E_p(z)/k_B T}$$

PERRIN donne les résultats de mesure, à 20 °C pour $\rho_s = 1,194 \text{ kg m}^{-2}$ et $r_s = 0,212 \text{ }\mu\text{m}$, suivants [60] :

Altitude (μm)	Nombre de sphérules (α)
5	100
35	47
65	23
95	12

en remplaçant $k_B = \mathcal{N}_A/R$ dans l'exposant et en ajustant un modèle aux valeurs, le calcul donnera :

$$\mathcal{N}_A^{1908} = 7,5 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

la valeur aujourd'hui définie est de :

$$\mathcal{N}_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

3. Capacité calorifique des solides

La thermodynamique, émergente au début du XIX^e siècle introduit des grandeurs intensives associées aux matériaux caractérisant la variation de température observée lors d'un transfert d'énergie thermique. On distingue différentes grandeurs selon les conditions opératoires, et nous nous intéressons ici aux solides soumis à des transferts thermiques sous pression constante. C'est la capacité calorifique molaire c_p que nous allons étudier : de nombreuses mesures ont été réalisées en 1819 par Louis DULONG et Alexis PETIT. Ces derniers mirent en évidence une remarquable indépendance de la capacité calorifique molaire au matériaux considéré.

La loi empirique de DULONG-PETIT donne que : $c_p \approx (3,0 \pm 0,2)R = (25 \pm 2) \text{ J K}^{-1} \text{ mol}^{-1}$ pour la majorité des solides [45].

3.1 Théorie cinétique des solides

Un modèle simple des solides permet de retrouver par la théorie la loi empirique de DULONG-PETIT.

On considère un solide cristallin, où chaque atome (masse m) vibre autour d'une position d'équilibre sous l'influence de l'agitation thermique. On considère les atomes indépendants, et identiques.

On repère un atome aux coordonnées (x, y, z) relatives à sa position d'équilibre, et on suppose l'oscillation harmonique à 3 dimensions. L'énergie de cet atome s'écrit :

$$E_1(t) = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2)$$

L'énergie interne moyenne du cristal s'écrit donc :

$$\langle E \rangle = N \left(\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2}k(x^2 + y^2 + z^2) \right)$$

Entracte : théorème d'équipartition de l'énergie

Un résultat général se présente lorsque l'énergie microscopique d'un système s'écrit comme une somme dont certains termes sont proportionnels au carré d'un degré de liberté et indépendants entre eux.

Pour simplifier le calcul amorcé dans cette section, nous allons le démontrer maintenant.

Soit un système d'énergie $E = aX^2 + E'$, où X est un degré de liberté du système et E' une énergie indépendante de X . La valeur moyenne de l'énergie aX^2 s'écrit :

$$\langle aX^2 \rangle = \int_{\mathcal{X}} aX^2 d\mathbb{P}(E(X)) = \frac{1}{Z} \int_{\mathbb{X}} aX^2 e^{-\frac{E}{k_B T}} dX =$$

To-Do Trouver une bonne biblio (regarder [25])

Retour au calcul amorcé

On termine facilement en considérant une isotropie des trois directions :

$$\langle E \rangle = N \left(6 \frac{k_B T}{2} \right) = 3N k_B T = 3N \frac{R}{\mathcal{N}_A} T = 3nRT$$

d'où la capacité calorifique molaire :

$$c_p = \frac{1}{n} \frac{\partial E}{\partial T} = 3R$$

Les écarts à l'expérience proviennent des approximations de ce modèle : particules indépendantes, potentiel harmonique isotrope, trois directions indépendantes.

To-Do Y en a-t-il d'autres ?

3.2 Modèle d'EINSTEIN (1907)

LP 17 : Rayonnement d'équilibre thermique, corps noir

1. Rayonnement et bilan radiatif [48]

1.1 Définition des flux

1.1.1 Émission

MANIP' Fil chauffé au rouge avec un courant électrique.

Tout corps convertit une partie de son énergie interne en rayonnement thermique. Il émet par sa surface par unité de temps une certaine quantité d'énergie que l'on décrit mathématiquement comme un flux noté φ_e homogène à une puissance.

1.1.2 Absorption

Lorsqu'un corps reçoit de l'énergie via un flux incident sur sa surface, noté φ_i , une partie peut être transformée en énergie interne. On définit un flux absorbé φ_a . La fraction du flux incident qui va être absorbée dépend de manière générale de la longueur d'onde.

1.1.3 Réflexion, diffusion

La partie du flux incident qui n'est pas absorbée peut être réfléchi (renvoyée dans une direction particulière), ou diffusée (renvoyée dans toutes les directions). On note la somme de ces deux termes φ_r . Le rayonnement réfléchi ou diffusé l'est à la même longueur d'onde que le rayonnement incident, mais là encore la fraction de flux qui est réfléchi ou diffusé est fonction de la longueur d'onde.

1.1.4 Transparence, opacité, exemples

Enfin, la partie du flux incident qui n'est ni absorbée ni réfléchi se comporte de manière indifférente à la présence du corps : elle le traverse. De manière catégorique on caractérisera ce type de milieux de transparents et les autres d'opaques, pour différents domaines de longueurs d'onde.

Le verre, par exemple, est un milieu transparent pour les longueurs d'ondes du visible mais il ne l'est pas pour les longueurs d'ondes de l'infrarouge.

Une salade nous apparaît verte car elle ne diffuse que les longueurs d'ondes du vert et absorbe les autres longueurs d'ondes visibles.

To-Do Faire un schéma avec des grosses flèches, pour la salade et le verre.

Dans la suite, nous allons nous restreindre aux corps opaques sur tout le spectre.

1.2 Relations entre les flux

1.2.1 Flux incident

Le flux incident est soit réfléchi, soit diffusé, soit absorbé :

$$\varphi_i = \varphi_r + \varphi_a$$

1.2.2 Flux partant

Le flux partant correspond à la somme du flux émis et du flux réfléchi :

$$\varphi_p = \varphi_e + \varphi_r$$

1.3 Équilibre radiatif

On dit qu'un corps opaque est en équilibre radiatif avec le rayonnement s'il n'emmaganisme pas et ne perds pas d'énergie via le rayonnement, ce qui revient à :

$$\varphi_p = \varphi_i \implies \varphi_e = \varphi_a$$

Notons que un corps en équilibre radiatif peut recevoir de l'énergie via un autre processus : l'équilibre radiatif n'implique pas l'équilibre thermodynamique.

2. Le problème du corps noir

2.1 Problématique

MANIP' Avec un spectro, montrer le spectre du fil chauffé, puis du Soleil, puis d'une lampe à filament.

Le spectrophotomètre permet de mesurer une fraction du flux émis par le corps chauffé. L'appareil mesure une énergie reçue (sur le capteur) pendant une durée d'intégration δt pour chaque domaine de longueur d'onde de largeur $\delta\lambda$. Sur le spectre on lit en ordonnée cette énergie par unité de surface par unité de temps par domaine de longueur d'onde. On peut définir plusieurs grandeurs toutes liées par des facteurs géométrique de surfaces ou d'angles (luminance, exitance, densité d'énergie), mais ce qui nous intéresse c'est la dépendance de ces grandeurs à la longueur d'onde.

Le spectre d'émission des corps chauds semble être approximable par une loi universelle fonction de la température, puisque la forme de la courbe est identique pour deux objets différents mais à la même température.

Vers la fin du XIX^e siècle les physiciens cherchèrent une modélisation qui permettrait de décrire ce phénomène et de fournir une expression mathématique du spectre. Pour s'affranchir de complications, il semble judicieux de considérer en premier lieux des objets dont le rayonnement partant est indépendant de leur environnement, autrement dit des objets tels que $\varphi_p = \varphi_e$ soit $\varphi_r = 0$ et donc $\varphi_i = \varphi_a$. Ces objets absorbent tout le rayonnement incident, on les appelle *corps noirs* mais attention : il n'apparaissent pas noirs, puisqu'ils émettent un rayonnement dans le visible ; leur appellation est due à leur spectre d'absorbtion.

Nous décrirons le spectre en terme d'énergie rayonnée par unité de temps par unité de surface par domaine de longueur d'onde, grandeur notée : $F_e(\lambda, T)$ exprimée en $\text{W m}^{-2} \text{m}^{-1}$ telle que : $\int_0^\infty F_e(\lambda, T) d\lambda = \varphi_e(T)/S$.

2.2 La loi de WIEN

Dès 1869, WIEN propose une relation empirique résultat d'un ajustement de la courbe mesurée :

$$F_e(\lambda, T) = \frac{3,7 \times 10^{-16} \text{ W m}^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{0,014 \text{ m K}}{\lambda T}}}$$

mais le graph de cette fonction présente un petit écart à l'expérience pour les grandes longueurs d'ondes. Surtout, il s'agit d'une relation empirique à laquelle les physiciens voulaient apporter une explication physique.

2.3 Le modèle de RAYLEIGH [27]

En 1900, RAYLEIGH propose un modèle issu de la physique statistique et qui semble correct à l'ensemble des physiciens. Il annonce :

$$F_e(\lambda, T) \propto \frac{c}{\lambda^4} \frac{\int_0^\infty E e^{-E/k_B T} dE}{\int_0^\infty e^{-E/k_B T} dE} = \frac{c}{\lambda^4} k_B T$$

Mais le spectre d'émission donné par ce modèle est très différent du spectre expérimental en particulier, il est monotone et présente une divergence aux courtes longueurs d'ondes.

NOTES

2.3.1 Explication

Considérons une cavité cubique d'arrête a , dans laquelle existe un champ électromagnétique que l'on peut décomposer comme somme d'ondes stationnaires. Ces ondes existent à condition que la longueur a soit un multiple entier de demi longueur d'onde, de sorte que :

$$\sin\left(\frac{a}{\lambda}\right) = 0 \implies \frac{a}{\lambda} = n\pi, n \in \mathbb{Z} \implies k \equiv \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{n\pi}{a}$$

Si l'on se ramène aux trois dimensions, on pourra écrire :

$$\begin{aligned} k_x &= \frac{n_x \pi}{a} \\ k_y &= \frac{n_y \pi}{a} \\ k_z &= \frac{n_z \pi}{a} \end{aligned}$$

d'où le vecteur d'onde :

$$\mathbf{k}^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \equiv \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2$$

Les vecteurs d'ondes décrits par les nombres $\{n_x, n_y, n_z\}$ tels que la somme de leurs carrés prend la même valeur (par exemple : $\{1, 1, 4\}$ et $\{3, 3, 0\}$) correspondent à des ondes de même longueurs d'ondes, mais de direction différente. Cependant, les vecteurs d'ondes décrits par les nombres $\{n_x, n_y, n_z\}$ et les nombres $\{-n_x, n_y, n_z\}$ décrivent les mêmes ondes stationnaires (il en va

de même pour les autres composantes) : il faut donc restreindre les valeurs prises par les n_i à l'ensemble \mathbb{N} .

Dans l'espace des états d'ondes stationnaires, divisé en volumes $(\frac{\pi}{a})^3$, le huitième positif du cadran de la couche sphérique délimitée par les boules de rayons k et $k + dk$ a un volume :

$$\frac{1}{8}4\pi k^2 dk = \frac{1}{2}\pi k^2 dk$$

en tenant compte des deux polarisations possibles pour chaque vecteur d'onde elle contient dN_k états d'ondes stationnaires :

$$dN_k = 2 \frac{\pi k^2 dk / 2}{(\pi/a)^3} = \frac{a^3 k^2 dk}{\pi^2}$$

nombre que l'on peut exprimer en fonction de la longueur d'onde associée à k : ($k = \frac{2\pi}{\lambda} \implies dk = \frac{2\pi}{\lambda^2} d\lambda$)

$$dN_\lambda = \frac{8a^3 \pi d\lambda}{\lambda^4}$$

On définit la densité d'états par unité de volume, $\rho(\lambda)$, comme :

$$\rho(\lambda) d\lambda \equiv \frac{dN_\lambda}{a^3} = \frac{8\pi}{\lambda^4} d\lambda$$

On s'intéresse maintenant à la densité d'énergie associée aux ondes stationnaires de longueurs d'ondes comprises entre λ et $\lambda + d\lambda$: elle s'écrit comme $\rho(\lambda)$ multiplié par l'énergie moyenne des états $\langle \epsilon(\lambda, T) \rangle$:

$$u(\lambda, T) = \rho(\lambda) \langle \epsilon(\lambda, T) \rangle$$

avec :

$$\langle \epsilon(\lambda, T) \rangle = \int_0^\infty \epsilon p(\epsilon) d\epsilon$$

où $p(\epsilon) d\epsilon$ est la probabilité pour que l'énergie d'un état se situe entre ϵ et $\epsilon + d\epsilon$.

En faisant l'hypothèse que les ondes stationnaires sont réparties en énergie selon une statistique de MAXWELL-BOLTZMANN, on aura :

$$p(\epsilon) = \frac{e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}}}{\int_0^\infty e^{-\frac{\epsilon}{k_B T}} d\epsilon}$$

d'où, après calcul :

$$\langle \epsilon(\lambda, T) \rangle = k_B T$$

finalement :

$$u(\lambda, T) = \frac{8\pi}{\lambda^4} k_B T$$

Alors, l'énergie rayonnée par les états de longueurs d'ondes comprises entre λ et $\lambda + d\lambda$ est :

$$u(\lambda, T)d\lambda = \frac{8\pi}{\lambda^4} k_B T d\lambda$$

elle est émise à la vitesse c de sorte que le spectre associé soit :

$$F_e(\lambda, T) = cu(\lambda, T) = \frac{8\pi c}{\lambda^4} k_B T$$

2.4 La solution de PLANCK [27]

PLANCK, qui cherchait une solution au problème se rendit compte que s'il remplaçait les intégrales $\int_0^\infty dE$ par des sommes discrètes $\sum_{n=0}^\infty n\epsilon$ alors le spectre devenait :

$$F_e(\lambda, T) \propto \frac{hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1}$$

à condition de poser $\epsilon = h c/\lambda$. Cette substitution, qui constitue en fait une hypothèse de quantification du rayonnement, n'avait aucun fondement théoriques, PLANCK lui même n'était alors pas convaincu par le modèle qui impliquait que les transferts d'énergie par rayonnement se faisaient de manière discrète comme par un échange de particules. Cette description donna naissance à la mécanique quantique et au photon : objet d'une autre leçon.

2.4.1 La loi de STEFAN-BOLTZMANN

2.4.2 La loi du déplacement de WIEN

3. Applications

3.1 Soleil - Terre

Température d'équilibre, effet de serre.

LP 18 : Phénomènes de transport

Niveau PSI, mais attention il manque des choses

Prérequis Thermodynamique Loi d'OHM locale

MANIP' Tubes de métaux plongés dans un bain thermostaté à l'une des extrémités. On relève la température à l'autre bout, après un temps donné. Elle change pour chaque métal.

To-Do Reprendre cette leçon en détaillant un peu plus l'établissement de l'équation de conservation. Regarder [16].

La thermodynamique permet de déterminer la température d'un système dans un état d'équilibre, mais elle ne nous renseigne pas sur l'évolution temporelle entre ces deux états.

Dans cette leçon on se place hors équilibre pour étudier l'évolution des systèmes. Les phénomènes de transport découlent d'une inhomogénéité globale des grandeurs intensives qui génèrent des flux (de charges, particules, chaleur, ...).

MANIP' Goutte d'encre dans l'eau ou dans un papier absorbant.

1. Généralités

1.1 Différents types de transports

- Conduction : transfert d'énergie sans déplacement macroscopique de matière (cas de la manip introductive)
- Convection : transfert d'énergie avec déplacement macroscopique de matière (vent, eau des radiateurs)
- Rayonnement : transfert d'énergie sans support matériel (sensation de chaleur au Soleil, près du feu)

Nous allons nous limiter aux phénomènes de conduction d'énergie thermique, illustrés par l'une des deux expériences introductives.

1.2 Équilibre thermodynamique local et équation de conservation

Dans un milieu hors équilibre, on ne peut pas définir toutes les grandeurs intensives à l'échelle macroscopique. Dans les barreaux de la manip d'exemple, il n'est pas possible de définir *une* température. La modélisation se fait alors par découpage de l'espace en petits éléments *mésoscopiques* dont la taille doit être assez faible pour que les grandeurs y soient homogènes mais assez grande pour qu'elles aient un sens : elle doit être grande devant la distance caractéristique interparticulaire (liquide 0,1 nm, gaz 0,1 μ m).

L'application du premier principe (loi de conservation de l'énergie) à un élément mésoscopique va s'écrire :

$$dH = \delta Q = -dt \oint_S j_{th} dS + \delta Q_c = -dt \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{j}_{th} d^3\mathbf{r} + \delta Q_c$$

or :

$$dH = \iiint_V [h(t + dt) - h(t)] d^3\mathbf{r} = \iiint_V \frac{\partial h}{\partial t} d^3\mathbf{r}$$

donc on obtient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j}_{th} = P_c$$

enfin, puisque $\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial h}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}$ alors on peut écrire une équation de conservation de l'énergie thermique :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{\rho c} \nabla \cdot \mathbf{j}_{th} = P_c$$

To-Do Parler de P_c .

2. De la conservation à la diffusion

2.1 Lois phénoménologiques

Pour l'énergie thermique, la loi de FOURIER est valable pour des gradients de température assez faibles dans les milieux isotropes et donne une expression de la densité de courant :

$$\mathbf{j}_{th} = -\lambda \nabla T$$

On remarquera le signe $-$ qui provient du second principe : l'énergie thermique va des zones de températures plus élevées vers celles de températures plus faibles. Le coefficient de conductivité thermique λ s'exprime en $\text{W m}^{-1} \text{K}^{-1}$, il prend des valeurs de l'ordre de 10^{-2} pour les gaz 10^{-1} pour les liquides 1 pour les solides.

To-Do Donner les valeurs pour les matériaux utilisés dans la manip, pour l'eau, pour l'air et un isolant du bâtiment (polystyrène). Penser à citer un exemple de bon conducteur thermique mais mauvais conducteur électrique.

La loi de FOURIER est analogue à la loi d'OHM locale : $\mathbf{j}_{el} = -\sigma \nabla V$ en électrocinétique ou à la loi de FICK : $\mathbf{j}_p = -\gamma \nabla n$ pour les particules.

2.2 Équation de diffusion

En remplaçant la densité de courant dans l'équation de conservation nous obtenons l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{\rho c} \nabla^2 T = 0$$

On introduit le coefficient de diffusion $D = \lambda/\rho c$ rapport de λ la capacité du matériaux à conduire l'énergie thermique par ρc la capacité du matériaux à emmagasiner l'énergie thermique. On remarquera le caractère irréversible de cette équation. On pourra établir une longueur caractéristique de diffusion : $l = \sqrt{D\tau}$.

To-Do Chercher et rédiger (ou pas) un modèle microscopique dans le cas des gaz parfaits (voir leçon présentée).

3. Exemple d'application : isolation et double vitrage

To-Do Faire un calcul de la puissance nécessaire pour maintenir un local à température fixée, dans le cas d'un simple vitrage d'épaisseur $3e$ ou d'un double vitrage d'épaisseur $e + e + e$. On pourra introduire l'analogie de la résistance électrique, et compléter l'analogie.

NOTES Il est peut être mieux de trouver un exemple où des sources d'énergie existent ou bien étudier la propagation d'ondes de chaleur dans les sols (BUP juin et dec 2002).

LP 19 : Bilans thermiques : flux conductif, convectif et radiatif

Niveau Cette leçon se situe à la limite extérieure du programme de seconde année de CPGE, puisque les phénomènes d'échange radiatifs vont être étudiés et pris en compte.

Prérequis Conduction, convection, rayonnement Loi de FOURIER Équation de la diffusion thermique

L'objet de cette leçon est d'étudier les phénomènes de transferts thermiques en proposant une unification de la modélisation, qui permettra de résoudre un problème qui peut sembler complexe à première vue : on étudiera les économies en énergie réalisables grâce à l'installation d'un double vitrage en tenant compte des trois modes d'échanges.

To-Do L'application est au cœur de la leçon !

Reprendre cette leçon en axant la discussion sur une optique d'économie d'énergie, on peut commencer en parlant du double vitrage. Bien penser à discuter les expressions des résistances : comment bien isoler ?

To-Do Ajouter des ordres de grandeur et penser à discuter des unités : du flux, des coefficients, des constantes, etc.

NOTES Avoir en tête des ordres de grandeur pour les conductivités des gaz, des liquides, des solides.

NOTES Connaître la constante de STEFAN-BOLTZMANN.

NOTES Savoir d'où vient le coefficient de convection h : lié à la conduction dans la couche limite, dépend de λ du fluide (mais pas de la paroi). En ordre de grandeur $\delta = h/\lambda$.

1. Notion de résistance thermique : étude de la conduction

1.1 Vecteur densité de courant thermique

L'équation de la diffusion thermique à une dimension

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \frac{\lambda}{\rho c} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

se retrouve à partir d'un bilan d'énergie thermique sur une portion infinitésimale d'un corps homogène de section droite S dans lequel il n'y a aucune source d'énergie, la température de dépend que de x et de t et duquel les parois parallèles à l'axe x sont isolées thermiquement. Le vecteur densité de courant thermique $\mathbf{J}(x, t)$ associé est lié à la température par la loi de FOURIER :

$$\mathbf{J}(x, t) = -\lambda \nabla T(x, t)$$

Si l'on se place en régime stationnaire, les températures en $x = 0$ et $x = L$ étant fixées à

T_0 et T_L , on obtient rapidement :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \implies T(x) = \frac{T_L - T_0}{L}x + T_0 \implies J \equiv \|\mathbf{J}\| = -\lambda \frac{T_L - T_0}{L}$$

On peut alors exprimer le flux thermique au travers de la section S :

$$\varphi = JS = -\lambda \frac{T_L - T_0}{L} S = -\frac{\lambda S}{L} \Delta T$$

1.2 Résistance thermique

En avançant une analogie avec l'électrocinétique, dans laquelle la différence de température joue un rôle de différence de potentiel et le flux thermique un rôle de courant, on peut définir une résistance thermique :

$$R_{th} | \Delta T = R_{th} \varphi \implies R_{th} = \frac{L}{\lambda S}$$

L'expression de cette résistance suit complètement l'analogie puisque pour un corps de conductivité électrique σ , de longueur L et de section S , traversé par un courant électrique i dans l'axe de la longueur, la résistance électrique s'exprime $R_{el} = \frac{L}{\sigma S}$.

1.3 Association de résistances

1.3.1 Rappels d'électrocinétique

En électrocinétique on associe des résistances en série par sommation directe :

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

et des résistances en parallèle par sommation des inverses :

$$R_{eq} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right)^{-1}$$

Revenons sur les définitions de *série* et *parallèle*. On dit que deux branches d'un circuit sont en *série* lorsqu'elles sont traversées par le même courant. On dit que deux branches d'un circuit sont en *parallèle* lorsqu'elles sont soumises à la même différence de potentiels.

1.3.2 En thermodynamique : série

On associe deux corps de conductivité thermique λ_1 et λ_2 ; le premier remplit l'espace entre $x = 0$ et $x = L_1$ et le second l'espace entre $x = L_1$ et $x = L_1 + L_2$. En régime permanent on note T_0, T_1, T_2 les températures en $x = 0, x = L_1, x = L_1 + L_2$.

Ces deux corps sont traversés par le même flux thermique $\varphi_1 = \varphi = \varphi_2$, avec :

$$\begin{cases} \varphi_1 = -\lambda_1 S \frac{T_1 - T_0}{L_1} \\ \varphi_2 = -\lambda_2 S \frac{T_2 - T_1}{L_2} \end{cases} \implies T_2 - T_0 = -\left(\frac{L_1}{\lambda_1 S} + \frac{L_2}{\lambda_2 S} \right) \varphi$$

On va donc pouvoir exprimer une résistance équivalente de l'ensemble par la relation :

$$R_{eq} = \frac{L_1}{\lambda_1 S} + \frac{L_2}{\lambda_2 S}$$

1.3.3 En thermodynamique : parallèle

On associe maintenant les deux corps de sorte que les deux soient exposés à la même différence de température, et traversés par des flux thermiques qui sont différents. Le premier corps de section droite S_1 remplit une partie de l'espace entre $x = 0$ et $x = L_1$ et l'autre, de section droite S_2 une partie de l'espace entre $x = 0$ et $x = L_2$. La température en $x = 0$ est notée T_0 , et la température en $x = L_1$ égale à la température en $x = L_2$ est notée T_1 . Le flux total au travers de l'association est maintenant $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ avec :

$$\begin{cases} \varphi_1 &= -\lambda_1 S \frac{T_1 - T_0}{L_1} \\ \varphi_2 &= -\lambda_2 S \frac{T_1 - T_0}{L_2} \end{cases}$$

d'où :

$$\varphi = -\left(\frac{\lambda_1 S_1}{L_1} + \frac{\lambda_2 S_2}{L_2}\right)(T_1 - T_0)$$

soit :

$$(T_1 - T_0) = -\frac{1}{\left(\frac{\lambda_1 S_1}{L_1} + \frac{\lambda_2 S_2}{L_2}\right)}\varphi$$

On va donc pouvoir exprimer une résistance équivalent de l'ensemble par la relation :

$$R_{eq} = \left(\frac{\lambda_1 S_1}{L_1} + \frac{\lambda_2 S_2}{L_2}\right)^{-1}$$

2. Convection et rayonnement

Comme annoncé en introduction, l'objectif de cette leçon est d'étudier les trois phénomènes de transferts thermiques en proposant une unification de la modélisation. C'est à travers cette notion de résistance thermique que nous allons simplifier les descriptions.

Les phénomènes de convection et de rayonnement permettent aussi de définir une forme de résistance thermique. Un corps qui échange avec son environnement de l'énergie à travers sa surface par convection et par rayonnement voit ses surfaces soumises à une différence de température ΔT traversées par un flux d'échange convectif φ_c et un flux d'échange radiatif φ_R . Si l'on arrive à introduire pour ces modes de transferts des grandeurs analogues à la résistance, alors on pourra dire que les échanges d'un corps avec son environnement se font avec une résistance thermique équivalente à l'association en parallèle des deux résistances.

2.1 Convection

La loi phénoménologique de NEWTON (dont l'expression n'est pas à connaître en CPGE) décrit les échanges thermiques pour les interfaces solide-fluide. Si l'on considère une surface S à la température T en contact avec de l'air à la température T_a , le vecteur densité de courant thermique sortant algébriquement de la surface lié à la convection va s'écrire :

$$\mathbf{J}_c = h_c(T - T_a)\mathbf{e}_x$$

où h_c est le coefficient de convection qui dépend des milieux en contact.

Ici, on peut définir une résistance thermique :

$$R_c = \frac{1}{h_c S}$$

2.2 Rayonnement

La loi de STEFAN donne l'énergie rayonnée par unité de surface par unité de temps pour un corps noir à la température T :

$$J_R = \sigma T^4$$

en fonction de la constante universelle de STEFAN-BOLTZMANN :

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3} \approx 5,67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$$

On rappelle que le corps noir est un modèle théorique qui décrit de manière approximative le spectre continu d'émission de corps réels.

À la surface d'un corps de température T en contact avec un environnement de température T_e , la densité de courant thermique sortant algébriquement de la surface de contact va donc s'écrire :

$$J_R = \sigma(T^4 - T_e^4)$$

On pourra, pour un corps de surface S , définir le flux thermique par rayonnement :

$$\varphi_R = J_R S = \sigma S(T^4 - T_e^4)$$

L'absence de dépendance en $T - T_e$ empêche de définir une résistance thermique par les mêmes considérations que précédemment. Mais pour des écarts de températures très faibles ($T = T_e + \Delta T$, $\Delta T \ll T_e$) un développement limité permettra d'écrire :

$$\varphi_R \approx \sigma S T_e^3 \Delta T$$

On peut maintenant exprimer :

$$R_R = \frac{1}{\sigma S T_e^3} \approx \frac{1}{\sigma S T^3}$$

3. Le double vitrage [17]

On se propose d'estimer les pertes thermiques d'un local maintenu à la température T_{int} dans une atmosphère de température T_{ext} . On suppose que la paroi qui sépare l'intérieur de l'extérieur est constituée d'un mur en béton et d'une vitre, d'abord en simple vitrage puis en double vitrage.

On considèrera que la paroi en contact avec l'extérieur échange de l'énergie thermique par convection avec l'air et par rayonnement avec l'atmosphère ; et que la paroi en contact avec l'intérieur échange de l'énergie thermique par convection avec l'air et par rayonnement avec l'intérieur du local.

Dans le cas du double vitrage on pourra négliger les phénomènes de convection pour l'air emprisonné entre les vitres, car l'épaisseur de la couche d'air est réduite à une épaisseur inférieure à celle de la couche limite d'adhérence de l'air sur le verre.

Pour aller plus loin

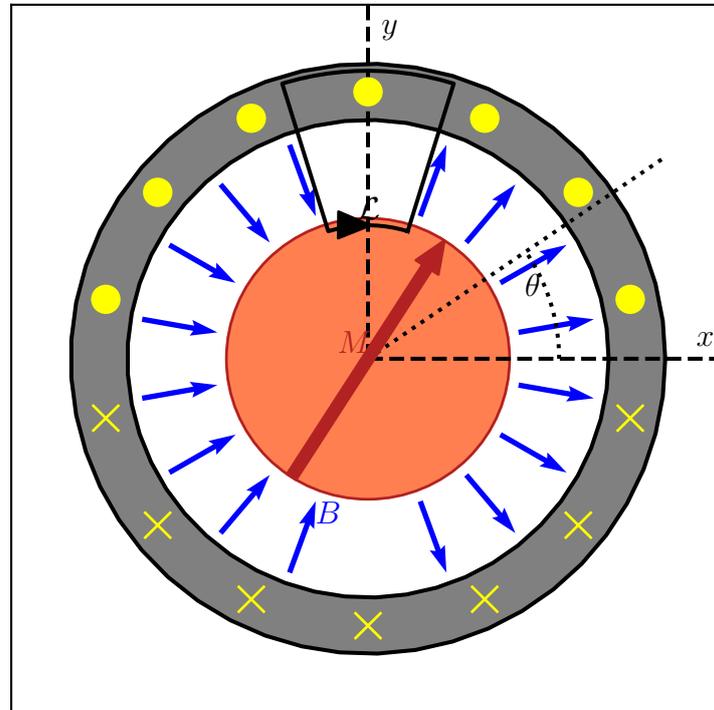
Cette leçon se concentre sur des échanges thermiques entre milieux unidimensionnels et thermostatés, mais l'on pourrait (dans le cadre du programme de PSI) d'une part généraliser les problèmes à trois dimensions et d'autre part s'intéresser à des bilans d'énergie thermique dans des situations où :

- les conditions aux limites sont périodiques (ondes thermiques)
- il y a des sources d'énergie thermique (effet JOULE)

En sortant à nouveau du programme de PSI, on pourrait établir une expression pour le coefficient de convection h_c [58], ou justifier l'origine de la loi de STEFAN.

LP 20 : Conversion de puissance électromécanique

Niveau PSI



PYTHON Document interactif accompagnant cette leçon : `./machine_synchrone.imgen.py`

1. Structure de la machine synchrone

1.1 Le rotor

Le rotor est un aimant permanent ou un circuit électrique (une spire) qui a le même comportement, on lui associe un moment magnétique M_r . Le rotor est un élément passif dans le moteur synchrone : il est mis en rotation par le stator.

1.2 Le stator

Le stator va générer un champ magnétique dont l'objectif est de faire pivoter le rotor. On comprend que ce champ magnétique doit varier dans le temps pour que le rotor tourne sans s'arrêter : le stator est constitué de bobinages que nous allons essayer de construire.

MANIP' Montrer avec une boussole qu'un champ magnétique fixe ne permet pas de faire un moteur. Montrer qu'avec un champ glissant on obtient un moteur.

1.3 L'entrefer

L'entrefer correspond à la couche d'air qui sépare le stator du rotor. Dans cette première étude de la machine synchrone nous considérons un cas idéal où l'entrefer a une épaisseur constante.

On l'appelle *entrefer* car le rotor et le stator sont fabriqués dans un matériau magnétique (typiquement un alliage de fer) de perméabilité magnétique μ que l'on suppose infinie, dans cette situation l'électromagnétisme nous apprend que le champ magnétique qui sort des morceaux métalliques est perpendiculaire à leurs surfaces. Dans l'entrefer le champ magnétique est donc radial.

2. Le champ glissant généré par le stator

2.1 Stator a une spire

On essaye de voir le mouvement qu'aurait un rotor associé à un stator constitué d'une spire. On construit le stator de sorte que seule les deux branches parallèles à l'axe de symétrie contribuent à la production du champ magnétique, c'est à dire que l'on suppose la longueur des spires grandes devant la longueur du rotor.

2.1.1 Invariances et symétries

Le problème est considéré invariant par translation selon l'axe z . Le problème n'est *pas* invariant par translation selon e_r , ni par rotation selon e_θ : on considèrera a priori que le champ magnétique dépend de ces deux dernières coordonnées. Cependant, on fera l'approximation que l'entrefer est suffisamment mince pour que l'on puisse négliger les variations du champ lorsqu'on s'y déplace radialement.

La distribution de courant étant symétrique par rapport au plan Oyz (on ignore le fil qui contourne du haut vers le bas), on a pour \mathbf{B} dans l'entrefer :

$$\mathbf{B}\left(\frac{\pi}{2} - \Theta\right) = -\mathbf{B}\left(\frac{\pi}{2} + \Theta\right)$$

La distribution de courant étant antisymétrique par rapport au plan Oxz le champ magnétique est symétrique par rapport à ce plan donc :

$$\mathbf{B}(-\Theta) = \mathbf{B}(\Theta)$$

2.1.2 Champ magnétique créé par l'un des fils

On peut appliquer le théorème d'AMPÈRE sur le contour \mathcal{L} , qui entoure l'un des fils et qui traverse radialement l'entrefer aux deux angles suivant :

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \Theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{et} \quad \theta' = \frac{\pi}{2} + \Theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$$

Cependant, comme les parties métalliques qui constituent le rotor et le stator ont une perméabilité magnétique $\mu = \infty$, l'excitation magnétique \mathbf{H} y est nulle : $\mathbf{H} = \mathbf{0}$, donc on ne s'intéresse pas vraiment au chemin qui prend le contour hors de l'entrefer.

Appliquons alors le théorème :

$$i = \oint_{\mathcal{L}} \mathbf{H} d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{L}_m} \mathbf{H} d\mathbf{l} + \int_{\mathcal{L}_e} \mathbf{H} d\mathbf{l}$$

Comme \mathbf{H} est radial dans l'entrefer :

$$\begin{aligned} i &= \int_{\mathcal{L}_e(\theta)} \mathbf{H} e_r d\mathbf{l} + \int_{\mathcal{L}_e(\theta')} \mathbf{H} (-e_r) d\mathbf{l} = \int_{\mathcal{L}_e(\theta)} H d\mathbf{l} + \int_{\mathcal{L}_e(\theta')} -H d\mathbf{l} \\ &= e \left(H(\theta) - H(\theta') \right) = 2eH(\theta) = -2eH(\theta') \end{aligned}$$

Enfin, comme l'aimantaion est nulle dans l'entrefer, $H(\theta) = B(\theta)/\mu_0$ donc :

$$\begin{cases} B(\theta) = +\frac{\mu_0 i}{2e} & \text{pour } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \\ B(\theta) = -\frac{\mu_0 i}{2e} & \text{pour } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \end{cases}$$

2.1.3 Champ créé par les deux fils

Par principe de superposition, on obtient rapidement que :

$$\begin{cases} B(\theta) = +\frac{\mu_0 i}{e} = B_0 & \text{pour } \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \\ B(\theta) = -\frac{\mu_0 i}{e} = -B_0 & \text{pour } \theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \end{cases}$$

2.2 Stator a plusieurs spires

Puisqu'il n'y a pas de gradient de champ magnétique (hormis les deux discontinuités), cette spire ne permet pas de modifier l'orientation du rotor. Pour créer un gradient de champ magnétique centré en $\theta = 0$, nous allons disposer un ensemble de spires régulièrement sur la circonférence du stator, ce qui permet d'obtenir un champ $B = f(\theta)$ triangulaire. En pratique les spires sont plutôt disposées de sorte à créer un champ sinusoïdal qui s'écrit alors :

$$B(\theta) = \frac{2\mu_0 N i}{\pi e} \cos(\theta) e_r \propto i \cos(\theta) e_r$$

on note que ce champ est bien dirigé selon $-e_r$ pour les valeurs de θ qui correspondent à celles que nous avons déjà déterminées.

Ce champ est toujours statique et ne permet donc pas de créer un moteur à proprement parler.

2.3 Stator a plusieurs phases

On décide d'alimenter l'ensemble des spires étudiées jusqu'ici avec le même courant alternatif $i_1 = I \cos(\omega t)$. Dans ce cas, le champ magnétique dans l'entrefer s'écrit :

$$B(\theta, t) = kI \cos(\omega t) \cos(\theta) e_r = kI \cos(\omega t) \cos(\theta) e_r$$

il a la forme d'une onde stationnaire. Ce champ varie dans le temps mais la position de son maximum correspond toujours à $\theta = 0$, nous n'avons donc pas avancé.

Cependant, de la trigonométrie (ou de LP24) on se rappelle que à partir de deux ondes stationnaires judicieusement déphasées, on peut former une onde progressive :

$$A_1 = \cos(\omega t) \cos(\theta) \quad \text{et} \quad A_2 = \sin(\omega t) \sin(\theta) \implies A_1 + A_2 = \cos(\omega t - \theta)$$

On peut donc en superposant les champs créés :

- par les spires étudiées jusqu'ici et alimentées avec i_1 ;
- par des spires décalées spatialement de $-\frac{\pi}{2}$ et alimentées par un courant en quadrature avance par rapport à i_1 , soit $i_2 = I \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) = I \sin(\omega t)$.

produire un champ glissant dont l'expression est :

$$B(\theta, t) = B_0 \cos(\omega t - \theta)$$

ce champ s'écrit comme une onde progressive, il se déplace à vitesse angulaire ω dans le sens trigonométrique autour de l'axe Oz .

3. Le champ du rotor

NOTES | On lui associe un moment magnétique...? Ou alors un champ sinusoïdal aussi...?

4. Couple moteur

NOTES | Attention, au niveau PSI on utilise pour calculer le couple l'expression fournie : $\Gamma = \partial E_{\text{mag}} / \partial \theta_r \mathbf{e}_z$.

Dans l'approximation des régimes quasi stationnaires, l'énergie volumique s'écrit : $e_{\text{mag}} = B^2 / 2\mu_0\mu_r$. Elle est alors nulle dans les parties métalliques et constante dans l'entrefer. On calcule E à partir de e en intégrant sur ce volume, en tenant compte du champ du stator *et* du champ du rotor : $B = B + B_r$. On trouve un terme de couplage de sorte que l'énergie magnétique s'écrit : $E \propto \text{cste} + \cos(\omega t - \theta_r)$.

Avec θ_r l'angle qui repère le rotor et Ω_r la vitesse angulaire du rotor, on trouve : $\Gamma \propto \sin((\omega - \Omega_r)t + \alpha)$

Pour que ce couple ne soit pas nul en moyenne, il faut $\Omega = \omega$. C'est la *condition de synchronisme*.

En traçant $\Gamma = f(\alpha)$ on voit que il peut y avoir un décrochage, et que la machine peut fonctionner en alternateur. On voit aussi que le démarrage n'est pas possible sans aide.

LP 21 : Induction électromagnétique

NOTES On ne dessine qu'une seule spire pour modéliser les bobines.

NOTES On insiste sur les conventions de signe choisies dans la leçon mais, en se référant aux expériences on fait attention à ne pas donner une idée de *positif* ou *négatif* absolu. La fem *change de signe* lorsque l'on change le pôle de l'aimant.

Niveau PCSI (MPSI, PTSI, TSI)

Prérequis Électrocinétique : bobines Champ magnétique d'un aimant, d'une bobine
Action d'un champ magnétique sur un moment magnétique Action d'un champ magnétique sur un circuit : force de LAPLACE

MANIP' On fait tourner un alternateur relié à une petite ampoule : elle s'allume.

MANIP' On approche un aimant d'un anneau en aluminium fixé à une tige en bois pivotante : l'anneau s'éloigne (expérience de FARADAY).

MANIP' On dispose deux bobines côtes à côtes et sur le même axe, l'une des deux étant alimentée par un générateur alternatif : une tension est mesurée aux bornes de l'autre.

MANIP' On approche le pôle Nord d'un aimant vers une bobine : une différence de potentiel apparaît à ses bornes.

MANIP' On fait l'expérience du rail de LAPLACE avec les deux tiges mobiles.

Jusqu'ici dans le cours de physique nous n'avons jamais vu d'explication aux phénomènes présentés ici. Les expériences semblent assez différentes mais nous allons voir dans cette leçon qu'elles sont toutes expliquées par la connaissance d'une nouvelle notion : l'induction électromagnétique.

Ce phénomène qui lie le magnétisme à l'électrocinétique va permettre d'expliquer ces expériences ainsi que le fonctionnement des transformateurs, des chargeurs sans fils, ou des puces NFC. Comme illustré dans les expériences la mécanique s'associe parfois au magnétisme et à l'électrocinétique : dans ce cas on peut étudier la conversion électromécanique d'énergie et explique le fonctionnement des moteurs, des alternateurs, ou des haut-parleurs. Cette leçon est riche en applications.

NOTES Dans les moteurs à courant continu ou synchrones, il n'y a pas de courant induits. C'est seulement le cas dans les moteurs asynchrones.

1. Lois de l'induction [66]

1.1 Force électromotrice induite, loi de FARADAY

Dans les expériences introductives, la variation d'une quantité liée au champ magnétique \mathbf{B} produit un courant dans le circuit fermé. L'amplitude de ce courant va dépendre des autres constituants du circuit, mais des expériences quantitatives montreraient qu'elle est liée à la variation du *flux* de \mathbf{B} à travers chaque spire la bobine.

La loi de FARADAY indique que le courant est égal à celui que produirait un générateur dont la force électromotrice (fem) serait :

$$\text{et } e_{\text{bobine}} = N e_{\text{spire}} \quad \text{avec } e_{\text{spire}} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad \text{et } \Phi = \iint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$$

la surface S est orientée et les valeurs de la fem et du flux sont algébriques. L'orientation de la surface donne une orientation à son contour, le courant et la fem sont orientés dans ce sens, en convention générateur.

MANIP' Refaire l'expérience avec l'aimant et la bobine en montrant l'approche de chaque pôle.

Les lignes de champ sortent du pôle nord de l'aimant donc si l'on entre ce pôle (resp. l'autre) dans la bobine, le flux augmente (resp. diminue) donc la fem est négative (resp. positive).

MANIP' Refaire l'expérience d'induction mutuelle en changeant la fréquence au générateur. Puis avec un signal triangle.

NOTES

Induction de NEUMANN [34] La loi de FARADAY vient de l'équation de MAXWELL-FARADAY :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

La fem entre deux points d'un circuit n'est autre que l'intégrale :

$$e = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}$$

or le théorème de STOCKES donne :

$$e = \int_C \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} \implies e = - \int_S \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}$$

pour une surface S fixée on peut sortir la dérivée par rapport au temps de l'intégrale sur l'espace :

$$e = -\frac{d}{dt} \left(\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \right) = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Induction de LORENTZ Elle concerne les cas où le champ \mathbf{B} est constant mais la surface S change dans le temps. Dans ce dernier cas, les électrons animés d'une vitesse \mathbf{v} subissent la partie magnétique de la force de LORENTZ :

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

perpendiculaire à \mathbf{v} à laquelle on associe le champ électromoteur : $\mathbf{E}_m = \mathbf{F}/q$.
Le fil étant orienté selon $d\mathbf{l}$, on associe au champ la fem :

$$\begin{aligned} e &= \int_C \mathbf{E}_m \cdot d\mathbf{l} = \int_C (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{l} \\ &= - \int_C (\mathbf{v} \times d\mathbf{l}) \mathbf{B} \\ &= - \int_C \mathbf{B} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \times d\mathbf{l} \right) \end{aligned}$$

comme \mathbf{B} et $d\mathbf{l}$ sont indépendants du temps :

$$e = - \int_C \mathbf{B} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \times d\mathbf{l} \right) = - \frac{1}{dt} \int_C \mathbf{B} (d\mathbf{x} \times d\mathbf{l}) = - \frac{1}{dt} \int_C \mathbf{B} d\mathbf{S} = - \frac{1}{dt} d\Phi$$

(Attention, les charges mises en mouvement par le champ vont avoir une composante de vitesse générant un effet HALL dans les fils rapidement compensé.)

1.2 Courant induit et champ magnétique, loi de LENZ

Nous avons déjà vu que la présence d'un courant dans une bobine entraînait la création d'un champ magnétique.

Le champ magnétique créé par une bobine (infinie) est : $\mathbf{B} = \mu_0 i n \mathbf{u}$, une analyse pas-à-pas du phénomène sur un schéma orienté montre que le courant qui s'établit dans le même sens que la fem va provoquer la création d'un champ magnétique orienté dans le sens opposé à celui de l'aimant qui s'approche (si l'on approche un nord d'un côté, la bobine crée un nord du même côté). En conséquence, l'intensité du champ magnétique dans la bobine va diminuer, et le flux aussi.

La loi de LENZ précise que les effets de l'induction sont tels que ces effets s'opposent toujours à la cause qui leur donne naissance.

La discussion sur le flux est correcte mais difficile à appréhender : on ne voit pas le champ magnétique : raisonnons plutôt sur la mécanique. En poursuivant le raisonnement qui mène à l'orientation du courant induit on peut calculer la force de LAPLACE ($d\mathbf{F} = i d\mathbf{l} \times \mathbf{B}$) exercée par l'aimant sur la bobine. On conclura que cette force pousse la bobine loin de l'aimant : les effets de l'induction s'opposent ici à l'approche de l'aimant qui crée ces effets. C'est ce que l'on observe dans l'expérience avec l'anneau d'aluminium.

Dans l'expérience du rail de LAPLACE on essaye d'augmenter le flux en augmentant la surface du circuit : le système répond en s'opposant à cette augmentation.

NOTES

On peut exprimer la force exercée entre l'aimant et une spire. Cette force est liée à l'interaction dipolaire entre les moments magnétiques :

- l'aimant génère un champ \mathbf{B}_a et porte un moment dipolaire \mathbf{m}_a ,
- la bobine polarisée génère un champ \mathbf{B}_b porte un moment dipolaire $\mathbf{m}_b = i\mathbf{S}$ (que l'on assure constant ici)

L'énergie potentielle de l'aimant dans le champ magnétique de la bobine est :

$$E_p = -\mathbf{m}_a \cdot \mathbf{B}_b.$$

À cette énergie on associe une force : $\mathbf{F} = -\nabla E_p = \nabla(\mathbf{m}_a \cdot \mathbf{B}_b)$.

Comme les deux vecteurs sont de sens opposés, si l'on fixe l'angle d'approche à nord contre nord, le produit scalaire est négatif : $\mathbf{F} = -m_a \nabla(B_b)$. La force est dirigée vers les faibles valeurs de B_b : loin de la bobine.

1.3 Principe de relativité

Ici les expériences sont faites en déplaçant l'aimant, la bobine étant fixe. On peut refaire ces expériences en fixant l'aimant et déplaçant la bobine pour retrouver les mêmes résultats.

NOTES

Les champs électrique et magnétique ne se transforment pas trivialement par changement de référentiel. On raisonne sur la force.

*

Dans les sections suivantes nous précisons des effets qui découlent de cette loi et les illustrerons par des applications technologiques.

2. Induction mutuelle et autoinduction [66]

On étudie dans cette section le cas de circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps.

2.1 Inductance mutuelle

MANIP'

Remonter l'expérience d'induction mutuelle.

On considère maintenant deux circuits électriques. Le circuit 1 composé d'une bobine est parcouru par le courant i_1 et crée donc un champ magnétique $\mathbf{B}_1 \propto i_1 \mathbf{u}$ dont les lignes de champ sont enlacées par une bobine dans le circuit 2. Le circuit 1 crée donc un flux Φ_{12} dans cette bobine.

Dans le cas général l'expression de Φ_{12} est compliquée mais comme \mathbf{B}_1 est proportionnel à i_1 on pourra dire que :

$$\Phi_{12} = M_{12}i_1$$

La situation inverse est vraie également de sorte que le circuit 2 crée un flux dans le circuit 1 :

$$\Phi_{21} = M_{21}i_2$$

Le théorème de NEUMANN indique que ces deux coefficients sont égaux (ils dépendent essentiellement de caractéristiques géométriques) : on appelle *inductance mutuelle* la grandeur $M = M_{12} = M_{21}$. Elle s'exprime en henrys : $\text{H} = \text{Wb A}^{-1} = \text{T m}^2 \text{ A}^{-1}$.

To-Do

Trouver la démonstration de ce théorème. Attention il n'est peut-être pas vrai dans le cas général.

NOTES $\text{Wb} \equiv \text{Vs}$ et $\text{T} \equiv \text{Wb m}^{-2}$ et $\text{H} \equiv \text{V A}^{-1} \text{s}$

Connaissant ces flux on peut exprimer les fem induites par mutuelle induction dans l'un et l'autre circuit :

$$e_{12} = -\frac{d\Phi_{12}}{dt} = -M_{12} \frac{di_1}{dt} \quad \text{et} \quad e_{21} = -\frac{d\Phi_{21}}{dt} = -M_{21} \frac{di_2}{dt}$$

On constate que par l'établissement d'un courant variable dans un circuit on peut transmettre de l'information ou de l'énergie dans un autre circuit.

2.2 Autoinductance

L'expression type $e = -M di/dt$ doit rappeler la modélisation électrique des bobines où : $e = L di/dt$. La ressemblance n'est pas un hasard.

Dans l'étude précédente nous avons cherché à modéliser en termes d'électrocinétique les effets d'induction de la bobine 1 sur la bobine 2 via la variations de flux magnétique Φ_{12} mais, nous n'avons pas regardé les effet de la variation du flux magnétique créé par la bobine 1 dans la bobine 1.

En effet, le champ magnétique B_1 créé par le courant i_1 est aussi présent dans la bobine 1 et va créer des effets d'inductions dits d'*autoinduction*. On peut calculer le flux Φ_{11} créé par la bobine dans elle même : comme toute à l'heure il n'est pas forcément trivial mais peut s'exprimer par proportionnalité : $\Phi_{11} = L_1 i_1$.

Les variations de ce flux créent une fem *autoinduite* :

$$e_{11} = -L_1 \frac{di_1}{dt}$$

Rappelons que dans cette modélisation la bobines est traitée comme un générateur (de fem e_{11}), d'où le signe opposé à celui usuel, quand la bobine est traitée comme un récepteur (tension aux bornes $u_L = L di_1/dt = -e_{11}$).

3. Électrocinétique de deux circuits couplés [66]

3.1 Schémas électriques équivalents

MANIP' On s'appuie à nouveau sur l'expérience d'induction mutuelle.

To-Do Faire les schémas avec les générateurs mais aussi avec les bobines en mutuelle induction (flèche courbée).

Dans une situation ou les deux bobines interagissent, aucun effet n'est négligeable devant l'autre. En conséquences, la fem qui existe au bornes de chacune des bobine traitée comme générateur correspond à la somme :

$$\begin{aligned} e_1 &= e_{12} + e_{11} = -M \frac{di_2}{dt} - L_1 \frac{di_1}{dt} \\ e_2 &= e_{21} + e_{22} = -M \frac{di_1}{dt} - L_2 \frac{di_2}{dt} \end{aligned}$$

On modélise les bobines : soit par des générateurs (symbole d'une source de tension) avec ces fem, soit par des dipôles récepteurs (symbole d'une inductances) avec les fem opposées.

Les deux circuits sont dit *couplés*. Encore une fois, on constate que par l'établissement d'un courant variable dans un circuit on peut transmettre de l'information ou de l'énergie dans un autre circuit.

3.2 Grandeurs électriques

Le circuit 1 est composé d'un générateur et d'une bobine, le circuit 2 est composé d'une bobine fermée sur elle même. On tiendra compte des résistances internes R_1 de la bobine 1 et du générateur et R_2 de la bobine 2.

On s'intéresse aux courants i_1 et i_2 qui circulent. Pour les calculer on représente les éléments de chaque circuits par des éléments parfaits, les bobines étant modélisées par des sources de fem :

$$\begin{aligned} 0 &= u_g(t) - R_1 i_1(t) + e_1(t) \\ 0 &= e_2(t) - R_2 i_2(t) \end{aligned}$$

en remplaçant chaque fem par son expression :

$$\begin{aligned} u_g(t) &= R_1 i_1(t) + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 &= L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} + R_2 i_2(t) \end{aligned}$$

En régime sinusoïdal forcé, on impose $u_g(t) = E_0 \cos(\omega t)$. En représentation harmonique :

$$\begin{aligned} \underline{u}_g &= (R_1 + j\omega L_1) \underline{i}_1 + j\omega M \underline{i}_2 \\ 0 &= j\omega M \underline{i}_1 + (R_2 + j\omega L_2) \underline{i}_2 \end{aligned}$$

On peut résoudre ce système d'équations pour obtenir :

$$\begin{aligned} \underline{i}_1 &= -\frac{R_2 + j\omega L_2}{j\omega M} \underline{i}_2 \quad \text{puis} \quad \underline{u}_g = \left[-(R_1 + j\omega L_1) \frac{R_2 + j\omega L_2}{j\omega M} + j\omega M \right] \underline{i}_2 \\ \text{sans oublier} \quad \underline{e}_2 &= R_2 \underline{i}_2 \end{aligned}$$

3.3 Bilan d'énergie

Multiplions les équations temporelles couplées précédentes par i_1 et i_2 :

$$\begin{aligned} u_g(t) i_1(t) &= R_1 i_1(t) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2(t) + M i_1(t) i_2(t) \right) \\ 0 &= R_2 i_2(t) + \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2(t) + M i_1(t) i_2(t) \right) \end{aligned}$$

on peut les combiner pour obtenir :

$$u_g(t) i_1(t) - R_1 i_1(t) - R_2 i_2(t) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (L_1 i_1^2(t) + L_2 i_2^2(t) + 2M i_1(t) i_2(t))$$

La puissance fournie par le générateur est :

$$P_g(t) = u_g(t)i_1(t)$$

La puissance dissipée par effet JOULE est :

$$P_J(t) = R_1i_1(t) + R_2i_2(t)$$

Le membre de droite dans le bilan de puissance correspond à la puissance fournie au champ électromagnétique par la bobine. Le champ emmagasine une énergie qui s'écrit :

$$W = \int_{t_0}^{t_1} P_{mag}(t)dt = \frac{1}{2} [L_1i_1^2(t) + L_2i_2^2(t) + 2Mi_1(t)i_2(t)]_{t_i}^{t_f}$$

c'est cette énergie qui est libérée lorsque les effets inductifs de la bobine s'opposent aux variations de courant électrique.

4. Exemples d'applications

To-Do Se renseigner sur le chauffage par induction avant d'en parler : il semblerait que le champ électrique variable qui accompagne le champ magnétique variable soit capable de retourner les spins du ferromagnétique et que c'est cet effet qui génère le plus d'énergie thermique, et non les courants de FOUCAULT.

4.1 Quelques exemples

Radio-étiquettes Les étiquettes RFID (« radio frequency identification ») sont de petits objets qui comprennent une antenne et une puce électronique, elles sont utilisées pour le suivi ou l'identification :

- d'articles (bibliothèques, magasins)
- de véhicules (télépéage, trains)
- d'animaux (sous-cutanée ou bague)
- de personnes (cartes de transport en commun, cartes d'accès)

L'antenne sert à récupérer de l'énergie en se couplant à un émetteur, puis à transmettre un signal commandé par la puce embarquée.

Technologie NFC Les appareils mobiles peuvent communiquer entre eux ou avec des radio-étiquettes compatibles par une technologie proche de RFID.

Rechargement sans fil En plaçant une batterie rechargeable dans le circuit secondaire, l'énergie fournie par le générateur peut être utilisée pour la recharger.

4.2 Le transformateur de tension [66]

On considère deux bobines (idéales, les résistances internes sont hors de vue) dans une situation d'induction mutuelle. Le circuit primaire (1) est soumis à une tension alternative $u_1(t)$ et est parcouru par le courant i_1 , il crée un champ magnétique variable. La bobine

du circuit secondaire qui enlace les lignes du champ créé par le primaire, va alors induire une fem $e_2(t)$ à ses bornes. On cherche la relation entre la tension $u_1(t)$ et la tension $u_2(t) = -e_2(t)$.

Exprimons les deux fem :

$$e_1(t) = -\frac{d\Phi_{11} + \Phi_{21}}{dt} = -N_1 S_1 \frac{dB}{dt}$$

$$e_2(t) = -\frac{d\Phi_{21} + \Phi_{22}}{dt} = -N_2 S_2 \frac{dB}{dt}$$

Par égalité du champ magnétique total :

$$\frac{u_2}{u_1} = \frac{N_2 S_2}{N_1 S_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

les transformateurs étant souvent conçus de sorte que $S_1 = S_2$.

En pratique les transformateurs électriques sont utilisés tout le long de la chaîne de transport de l'énergie électrique :

- transformateur élévateur, en sortie de centrale de production pour abaisser l'intensité (en augmentant la tension) : 20 kV/400 kV
- transformateur ferroviaires : 400 kV/28 kV
- transformateur de distribution, à l'entrée des zones d'utilisation grand public : 400 kV/230 V
- transformateur domestique (ordinateur portable) : 230 V/12 V

NOTES

On aura en tête les puissances typiques au niveau de la production :

Centrale	Puissance (MW)
Éolienne	200
Photovoltaïque	250
Thermique	500
Hydroélectrique	1000
Nucléaire	1600

On aura aussi en tête les pertes associées aux transformateurs :

- par effet JOULE
- par fuites de champ
- par courants de FOUCAULT
- par hystérésis

Pour aller plus loin

À la suite de cette leçon on pourra calculer une grandeur encore mystérieuse : le coefficient de mutuelle induction M dans le cas particulier de deux bobines infinies qui partagent le même axe.

Dans une leçon suivante, nous étudierons d'autres situations où l'induction électromagnétique joue un rôle primordial : la conversion électromécanique de puissance, illustrée dans l'une des expériences. J'ai fait le choix de ne pas traiter ces applications dans cette leçon car c'est le cœur de la leçon LP20 et, le BO de PCSI suggère de traiter « circuit fixe dans un champ magnétique qui dépend du temps » avant « circuit mobile dans un champ magnétique fixe ».

Précisons que l'on retrouvera l'étude du transformateur en classe de PSI.

LP 22 : Rétroaction et oscillations

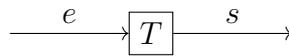
MANIP' Préparer un ALI en montage amplificateur non inverseur avec $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$.

1. Rétroaction

1.1 Schémas blocs et définitions

1.1.1 Schéma bloc

On modélise un morceau de système technique (électronique, mécanique) par un ensemble de blocs à une entrée et une sortie.



Plutôt que d'exprimer ces grandeurs dans le domaine temporel (variable t) on les exprime dans le domaine de LAPLACE (variable p). La transformation associée est étudiée dans le cours de sciences de l'ingénieur. En électronique, l'entrée $e(p)$ et la sortie $s(p)$ sont des tensions.

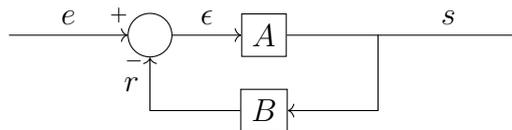
1.1.2 Fonction de transfert

On appelle *fonction de transfert* le rapport :

$$T(p) \equiv \frac{s(p)}{e(p)}$$

1.1.3 Système bouclé

On dit qu'un système est *bouclé* lorsque le schéma bloc se présente sous cette forme :



Le bloc A est appelé *chaîne directe*, et le bloc B est appelé *chaîne de retour*. L'élément supplémentaire est un *comparateur* : $\epsilon = e - r$. On peut exprimer la fonction de transfert de l'ensemble :

$$s = A\epsilon \quad \text{et} \quad \epsilon = e - Bs \implies T = \frac{s}{e} = \frac{A}{1 + AB}$$

1.2 Exemple avec l'ALI non inverseur

1.2.1 Fonctions de transfert

L'ALI combine à la fois le comparateur et le bloc de la chaîne directe. On peut réaliser le montage non inverseur et dans ce cas, le pont diviseur de tension constitue la chaîne de retour du système bouclé.

La chaîne directe intégrée à l'ALI se comporte comme un filtre passe bas dont l'équation différentielle est :

$$\frac{ds}{dt} + \omega_0 s(t) = \mu_0 \omega_0 e(t)$$

La transformée de LAPLACE pour les dérivées donne : $y'(t) \rightarrow py(p) - y'(0)$, alors l'équation différentielle devient :

$$ps(p) + \omega_0 s(p) = \mu_0 \omega_0 e(p) \implies T(p) = \frac{\mu_0}{1 + p/\omega_0}$$

Pour les ALI ordinaires $\mu_0 = 10^5$ et $\omega_0 = 100 \text{ rad s}^{-1}$.

La chaîne de retour correspond à un amplificateur proportionnel dont la fonction de transfert va s'écrire :

$$B(p) = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = B$$

La fonction de transfert de l'ensemble va alors s'écrire :

$$T(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p)B(p)} = \frac{\frac{\mu_0}{1+p/\omega_0}}{1 + \frac{\mu_0}{1+p/\omega_0}B} = \frac{\frac{\mu_0}{1+\mu_0 B}}{1 + p(1 + \mu_0 B)/\omega_0} = \frac{\mu}{1 + p/\omega_c}$$

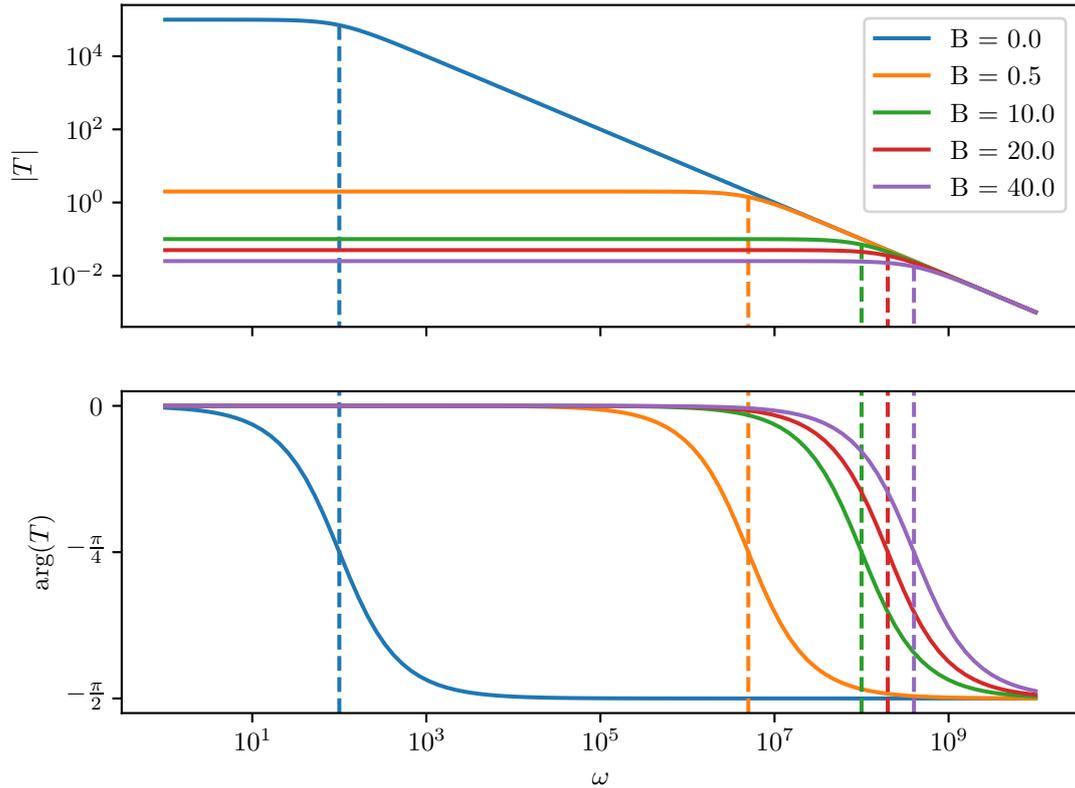
le calcul étant mené jusqu'à la forme dite *canonique*.

1.2.2 Gain et bande passante

Le gain μ_0 et la pulsation de coupure ω_0 de l'ALI seul ne s'appliquent plus lorsqu'il est bouclé : les quantités sont modifiées par $\mu = \mu_0/(1 + \mu_0 B)$ et $\omega_c = \omega_0(1 + \mu_0 B)$. On peut cependant calculer :

$$\mu \omega_c = \mu_0 \omega_0$$

et constater que le produit est indépendant du bouclage B . En choisissant par exemple $R_1 = R_2 = 1 \text{ k}\Omega$, on peut calculer $\mu = 2$ et $\omega_c = 5 \times 10^6 \text{ rad s}^{-1}$. Le bouclage permet d'élargir la bande passante en diminuant le gain.



2. Stabilité des systèmes bouclés

On retourne vers l'équation différentielle du filtre passe bas :

$$\begin{aligned}
 T(p) = \frac{s(p)}{e(p)} = \frac{\mu}{1 + p/\omega_c} &\implies \frac{ds}{dt} + \omega_c s(t) = \mu \omega_c e(t) \\
 &\implies \frac{ds}{dt} + \omega_0(1 + \mu_0 B)s(t) = \mu_0 \omega_0 e(t) \\
 &\implies s(t) = s_0 e^{-t\omega_0(1 + \mu_0 B)} + \mu e(t)
 \end{aligned}$$

On dit que le système est stable si quand $e(t)$ tends vers une constante alors $s(t)$ tends aussi vers une constante. Il faut donc que le terme en exponentielle converge vers une valeur nulle, c'est-à-dire qu'il faut :

$$-\omega_0(1 + \mu_0 B) < 0$$

Dans le cas de l'amplificateur non inverseur, comme le gain μ_0 est fixé est positif et $B > 0$, alors nécessairement le système est stable.

Si l'on avait branché la commande e sur l'entrée inverseuse et la rétroaction sur l'entrée non inverseuse, la fonction de transfert générale serait modifiée en :

$$T = \frac{-A}{1 - AB}$$

et donc, l'équation différentielle :

$$\frac{ds}{dt} + \omega_0(1 - \mu_0 B)s(t) = -\mu_0 \omega_0 e(t)$$

donnerait les solutions :

$$s(t) = s_0 e^{-t\omega_0(1-\mu_0 B)} - \mu e(t)$$

la stabilité est possible pour :

$$-\omega_0(1 - \mu_0 B) < 0 \implies \mu_0 B < 1$$

en pratique cela correspond à $B < 10^{-5}$ (soit $R_1 = 1 \Omega$ et $R_2 > 100 \text{ k}\Omega$). Dans le cas limite, la pulsation de coupure est : $\omega_c = 200 \text{ rad s}^{-1}$ et le gain $\mu = 50\,000$. Le problème est alors de ne pas saturer l'ALI. Il faut $e < \frac{15 \text{ V}}{50\,000} = 0,3 \text{ mV}$.

3. Oscillation des systèmes bouclés

3.1 Condition d'oscillation

3.2 Oscillateur à pont de WIEN

MANIP' Faire la manip.

3.3 Étude des oscillations

LP 23 : Aspects analogique et numérique du traitement d'un signal, étude spectrale

Prérequis Signaux périodique Notion de timbre Transformée de FOURIER

MANIP' On enregistre sur l'ordinateur le son La d'un diapason : c'est notre signal de base. On écoute ce son avec un ampli-GBF et un HP avec la sortie jack de l'ordinateur.

Avec un montage amplificateur de l'AOP on fait saturer le son que l'on envoie sur le HP : on entend la différence.

Les signaux associés à ces sons (La , 440 Hz) sont différents car les *timbres* sont différents. L'oscilloscope en TF montre bien que la fréquence fondamentale est la même mais que le son saturé est constitué d'autres harmoniques.

Dans cette leçon nous allons travailler avec ces sons pour étudier les rudiments du traitement du signal. Il s'agit de pouvoir par la suite :

- exploiter des systèmes physiques ou techniques pour créer ou altérer des signaux en remplissant les attentes d'un cahier des charges (génération, modulation, amplification)
- appréhender les problèmes expérimentaux que l'on peut rencontrer lors de l'acquisition de données expérimentales en vue d'une modélisation

1. Traitement analogique du signal

Parce que les sons (étant associés à la pression locale de l'air), comme les autres signaux physiques, sont avant tout des signaux analogiques dont l'amplitude est continue dans le temps nous allons commencer par étudier le traitement analogique du signal.

1.1 Traitement passif

1.1.1 Filtrage fréquentiel

On peut filtrer les harmoniques du signal saturé pour retrouver le son du diapason.

1.1.2 Intégration, dérivation

1.1.3 Autre chose ?

1.2 Traitement actif

Avantage :

- on peut amplifier même hors résonance (car énergie supplémentaire),
- peut-être non linéaire (comparateur : asservissement de base, hystérésis : mémoire, oscillateur : générateur de signal carré)

Inconvénient :

- non linéaire parfois embêtant (saturation, moins précis (zoomer sur l'oscillo))

1.2.1 Filtrage fréquentiel

1.2.2 Intégration, dérivation

1.2.3 Modulation d'amplitude

2. Traitement numérique

Pourquoi vouloir faire du numérique ?

- stockage
- compression
- les processeurs permettent des traitement plus sophistiqués ou modifiables via une mise-à-jour

Comme les signaux sont d'origine analogique on étudie ici la conversion analogique vers numérique.

2.1 Conversion analogique-numérique

2.1.1 Échantillonnage

La première étape de la conversion consiste à discrétiser le temps. Évidemment plus le pas de temps est court plus le signal est proche de l'original mais plus la quantité de données est importante. Alors la question est : jusqu'où peut on aller ? Critère de SHANNON.

PYTHON Le script `./python/traitement_sons_shannon.py` montre un signal réel, son échantillonnage, la transformée de FOURIER, et le signal reconstruit, pour différentes valeurs de fréquence d'échantillonnage.

2.1.2 Quantification

Remarque : la quantification fait perdre de l'information de manière définitive contrairement à l'échantillonnage sous le critère de SHANNON.

2.2 Traitement

PYTHON Le script `./python/traitement_sons_bruit.py` montre un signal réel bruité, son échantillonnage, la transformée de FOURIER, et le signal reconstruit, puis le signal reconstruit après filtrage numérique.

On n'en parle pas plus ici, calcul numérique, cours d'informatique.

LP 24 : Ondes progressives, ondes stationnaires

Dans cette leçon sur les ondes on s'intéresse à deux types particuliers de solutions à l'équation de D'ALEMBERT. Ces solutions ont déjà été rencontrées dans divers problèmes et introduites par des considérations phénoménologiques.

L'objectif de cette leçon est de revenir sur l'équation de D'ALEMBERT et sur les considérations physiques qui mènent à l'écriture d'ondes progressives ou d'ondes stationnaires et nous pourrions étudier les différences qui existent entre les deux.

To-Do Énoncer les hypothèses faites dans cette leçon : dispersion, absorption, linéarité, ...

NOTES On fait le choix de mener les calculs sur la corde plutôt que le câble car l'étude de la corde ne nécessite l'introduction que d'un seul paramètre : la déformation y ; l'étude du câble nécessite l'introduction de u et i .

1. Équation de D'ALEMBERT

1.1 Rappels, notations

MANIP' Montrer la corde de MELDE avec des conditions aux limites qui ne donnent pas lieu à une réflexion.

Montrer aussi le câble coaxial dans les mêmes conditions.

L'équation de D'ALEMBERT décrit la propagation des ondes, c'est une équation aux dérivées partielles dont la dérivée seconde par rapport au temps illustre le caractère réversible. Concernant les ondes sur la corde on trouve :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$$

avec $c = \sqrt{\frac{T_0}{\mu}}$ la célérité de l'onde.

1.2 Solution générale

On montre mathématiquement que les solutions générales de cette équation sont de la forme :

$$y(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

où f et g sont deux fonctions deux fois dérivables par rapport au temps et à l'espace. Les solutions progressives et les solutions stationnaires sont donc des cas particuliers de combinaisons linéaires de cette forme de solution générale.

2. Solutions progressives

2.1 Ondes progressives

Si l'on considère le cas où $g(t + \frac{x}{c}) = 0$, et $f(t - \frac{x}{c})$ est quelconque, puis que l'on trace des graphes de la fonction $y(x; t_i)$ pour différents instants t_i , on constate que cette solution correspond à la propagation d'un *paquet d'ondes* dans le sens des x croissants.

Concernant le paquet d'ondes sa forme est donnée par :

- $y(x, t = 0) = y_{t0}(x)$ donne l'amplitude du signal en fonction de x à l'instant $t = 0$, cela correspond à prendre une photo de la corde à un instant donné ;
- $y(x = 0, t) = y_{x0}(t)$ donne l'amplitude du signal au cours du temps en $x = 0$, cela correspond à filmer la hauteur de la corde à un point donné.

MANIP' Avec deux oscilloscopes on peut regarder $y_x(t)$ le long du câble coaxial.

PYTHON On peut utiliser `./python/prop_onde_cl.py` pour illustrer la propagation d'un paquet et montrer $y_t(x)$.

Évidemment, g va correspondre à la propagation dans les sens des x décroissants. Ce type de solutions nécessite donc de faire l'hypothèse que le signal ne se déplace que dans une direction : il ne doit pas y avoir de réflexions ou d'autres sources.

2.2 Ondes progressives harmoniques

La linéarité de l'équation de D'ALEMBERT permet de décomposer une des solutions pour l'écrire comme une somme d'autres solutions.

En physique il est très utile de décomposer les phénomènes ondulatoires en solutions harmoniques. Concernant les solutions progressives de l'équation de D'ALEMBERT, on peut vérifier que :

$$f_i(t - \frac{x}{c}) = y_0 \cos(\omega_i(t - \frac{x}{c}) + \varphi_i)$$

correspond bien à une solution. Et les travaux de FOURIER nous permettent d'affirmer que toute fonction peut s'écrire comme une somme de f_i . Le paquet d'onde dans l'illustration précédente est formé à partir de :

$$y(x, t) = y_0 \int e^{-\frac{(\omega - \omega_0)^2}{2\Delta\omega^2}} \cos(\omega(t - \frac{x}{c})) d\omega$$

MANIP' Le paquet d'onde dans l'expérience du câble coaxial est formé à partir de...

2.3 Propagation de l'énergie

On définit les ondes comme les phénomènes qui propagent de l'énergie sans transport de matière. Il est alors important de regarder comment se propage cette énergie.

Sur l'exemple de la corde l'énergie cinétique linéique et l'énergie potentielle linéique sont données par :

$$e_c = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \quad \text{et} \quad e_p = \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

donc l'énergie linéique est :

$$e = \frac{\mu}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 + \frac{T_0}{2} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

La conservation de l'énergie assure que :

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{\Pi}) = 0$$

où $\mathbf{\Pi}$ correspond au vecteur densité de courant d'énergie. On peut calculer à une dimension : $\nabla \cdot \mathbf{\Pi} = \partial \Pi / \partial x$:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Pi}{\partial x} &= \frac{\partial e}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial t} + T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \frac{\partial y}{\partial x} \\ &= T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial y}{\partial t} + T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \frac{\partial y}{\partial x} \end{aligned}$$

par propriété inverse sur la dérivée du produit :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \Pi}{\partial x} &= T_0 \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t \partial x} \frac{\partial y}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

en intégrant ce résultat :

$$\Pi = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t} + \Pi_0$$

On choisira la constante d'intégration comme étant le vecteur nul. Pour une onde progressive harmonique :

$$y(x, t) = y_0 \cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right)$$

on obtient :

$$\Pi = -T_0 \frac{y_0^2 \omega^2}{c} \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

la densité d'énergie se propage donc à la vitesse c dans la même direction que l'onde.

NOTES

Pour le câble coaxial : $e_C = \frac{\Gamma}{2} u^2$ et $e_L = \frac{\Lambda}{2} i^2$.

$$\frac{\partial e}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\Gamma}{2} u^2 + \frac{\Lambda}{2} i^2 \right) = \Gamma u \frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda i \frac{\partial i}{\partial t}$$

or, les équations différentielles couplées sont :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t} \\ \frac{\partial i}{\partial x} &= -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \end{aligned}$$

alors :

$$\frac{\partial e}{\partial t} = u \frac{\partial i}{\partial x} + i \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (ui) \implies \Pi = ui$$

à nouveau, pour une onde progressive harmonique :

$$\Pi \propto \sin^2\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) = f\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

3. Réflexion d'ondes progressives [64]

3.1 Forme mathématique, conditions aux limites

3.1.1 Forme mathématique de l'onde réfléchie

Pour étudier les ondes progressives nous avons tout à l'heure dû faire l'hypothèse que les ondes ne se propagent que dans une direction ($f \neq 0, g = 0$) ; donc qu'il n'y avait ni réflexion ni autre sources.

Ces hypothèses nous plaçaient dans un cadre mathématique simple avec une seule fonction à étudier. Dans cette deuxième partie on propose une hypothèse différente : nous admettons que la réflexion en $x = L$ est parfaite de sorte que l'onde qui se propage dans un sens prend la même forme que celle qui se propage dans l'autre sens mais avec un signe opposé :

$$g\left(t + \frac{L}{c}\right) = -f\left(t - \frac{L}{c}\right)$$

On impose donc un lien entre g et f en L quelque soit t . Pour connaître l'amplitude de l'onde réfléchie g en $x \neq L$ à l'instant t , on doit chercher à quel instant t' elle a été générée en $x' = L$:

$$\begin{aligned} g\left(t + \frac{x}{c}\right) &= -f\left(t' - \frac{x'}{c}\right) \\ t + \frac{x}{c} &= t' - \frac{L}{c} \\ t + \frac{x+L}{c} &= t' \\ \implies g\left(t + \frac{x}{c}\right) &= -f\left(t + \frac{x+L}{c} - \frac{x'}{c}\right) \\ \implies g\left(t + \frac{x}{c}\right) &= -f\left(t + \frac{x-2L}{c}\right) \end{aligned}$$

3.1.2 Onde résultante

L'amplitude effectivement mesurée en un point de la corde à un instant donné est :

$$y(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) - f\left(t + \frac{x-2L}{c}\right)$$

En particulier, au point $x = L$ où se fait la réflexion on a $y(L, t) = 0$.

3.2 Ondes harmoniques

Pour une onde incidente harmonique :

$$\begin{aligned} y(x, t) &= y_0[\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right) - \cos\left(\omega\left(t + \frac{x-2L}{c}\right)\right)] \\ &= 2y_0 \cos\left(\omega t - \frac{L}{c}\right) \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \frac{L}{c}\right) \end{aligned}$$

4. Ondes stationnaires [66]

4.1 Caractéristiques

En considérant deux ondes progressives harmoniques f et g de même pulsation, vitesse, amplitude mais de direction de propagation opposées, on trouve que l'onde résultante prend la forme :

$$y(x, t) = 2y_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos\left(\frac{\omega}{c}x + \psi\right)$$

L'amplitude $y(x, t)$ s'écrit comme le produit d'une fonction périodique du temps et d'une fonction périodique de l'espace. Contrairement aux ondes progressives f et g dont l'amplitude dépend de $t - \frac{x}{c}$, les variables de temps et d'espace sont maintenant séparées.

4.2 Noeuds et ventres

Le facteur $\cos\left(\frac{\omega}{c}x + \varphi\right)$ s'annule pour des positions précises, que l'on appelle *noeuds* et prend sa valeur maximale pour des positions que l'on appelle *ventres*. Le facteur $\cos(\omega t + \psi)$ fait varier l'amplitude des ventres au cours du temps. Pour alléger les expressions, on prend $\varphi = 0 = \psi$.

Les ventres sont situés aux positions x telles que :

$$\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) = 1 \implies \frac{\omega}{c}x = n\pi \implies x = \frac{cn\pi}{\omega} = \frac{n\lambda}{2}$$

et les noeuds :

$$\cos\left(\frac{\omega}{c}x\right) = 0 \implies \frac{\omega}{c}x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \implies x = \frac{cn\pi}{\omega} + \frac{c\pi}{2\omega} = \frac{n\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4}$$

La distance entre deux noeuds ou entre deux ventre consécutifs est $\frac{\lambda}{2}$, et la distance entre un noeud et un ventre consécutifs est $\frac{\lambda}{4}$.

4.3 Aspect énergétique

Montrer que l'énergie ne se propage pas : $\langle \Pi \rangle = 0$.

LP 25 : Ondes acoustiques

Niveau Cette leçon se situe à la limite extérieure du programme de PSI, puisqu'on démontre les expressions de $\mathbf{\Pi}$ et e .

Prérequis Thermodynamique Mécanique des fluides (description eulérienne) Notions d'électromagnétisme (POYNTING, OPPH) Équation de D'ALEMBERT

NOTES On se restreint aux ondes sonores dans les fluides et d'amplitude associées à la perception humaine. Donc pas les ondes dans les solides, ni les gros boum.

To-Do Parler plus précisément des émetteurs et des capteurs (façon [16], ou LP33) ?

1. Équation de propagation des ondes acoustiques [16]

1.1 Grandeurs dynamiques

Concernant les ondes acoustiques la grandeur qui se propage est, essentiellement, une variation locale de pression. Les sons sont produits par une compression locale du fluide, qui va à son tour comprimer le fluide avoisinant, et ainsi de suite.

Py-Do Faire une petite animation.

Une variation de pression est associée à une variation de masse volumique ; le fluide étant mis en mouvement nous pourrions considérer une variation locale de vitesse. Concrètement, en se plaçant dans le référentiel dans lequel le fluide est à l'équilibre en absence d'onde sonore, nous décrivons le fluide par :

$$\begin{aligned}p(M, t) &= p_0 + p_1(M, t) \\ \mu(M, t) &= \mu_0 + \mu_1(M, t) \\ \mathbf{v}(M, t) &= \mathbf{0} + \mathbf{v}_1(M, t)\end{aligned}$$

Les grandeurs indicées 0 sont celles d'équilibre alors que celles indicées 1 sont celles dues à l'onde.

Nous avons pensé judicieux de décrire le fluide avec trois grandeurs. Nous devons alors trouver trois équations pour résoudre le problème.

1.2 Équations de la dynamique des fluides

1.2.1 Équation d'EULER

Nous allons supposer un fluide parfait dans lequel l'écoulement est isentropique (pas de viscosité, ni de transfert thermique : les variations sont suffisamment rapides pour que ces effets soient négligeables). Cette hypothèse sera justifiée a posteriori.

On étudie une particule fluide soumise à l'action de la pesanteur, à la poussée d'ARCHIMÈDE, et aux forces de pression horizontales. Pour simplifier notre approche nous allons négliger les effets de pesanteur sur le fluide parfait (propagation horizontale des ondes).

L'équation d'EULER s'écrit :

$$\frac{d\mu\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial\mu\mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\mu\mathbf{v}) = -\nabla p$$

1.2.2 Équation de continuité

La conservation de la masse va s'écrire :

$$\frac{\partial\mu}{\partial t} + \nabla \cdot (\mu\mathbf{v}) = 0$$

1.2.3 Équation d'état

On rappelle qu'une équation d'état est une équation qui lie les variables d'état à l'équilibre du système. Nous souhaitons ici une équation liant μ à p , toujours dans le cadre de petites variations nous pourrions supposer un lien de proportionnalité donné par le coefficient de compressibilité isentropique :

$$\chi_s = \frac{1}{\mu} \left. \frac{\partial\mu}{\partial p} \right|_s \implies \chi_s \approx \frac{1}{\mu} \frac{\mu_1}{p_1} \implies \mu_1 \approx \chi_s (\mu_0 + \mu_1) p_1 \approx \chi_s \mu_0 p_1$$

1.3 Linéarisation des équations

Les variations relatives des grandeurs μ , p , et v sont suffisamment faibles de sorte que l'on écrive : $\mu_1 \ll \mu_0$, et $p_1 \ll p_0$. Cette hypothèse sera justifiée à posteriori. Le développement de ces grandeurs dans les équations précédentes donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\mu_0\mathbf{v}_1}{\partial t} + \underbrace{\frac{\partial\mu_1\mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)(\mu\mathbf{v})}_{\text{ordre 2}} &= -\underbrace{\nabla p_0}_{\mathbf{0}} - \nabla p_1 \\ \underbrace{\frac{\partial\mu_0}{\partial t}}_{\mathbf{0}} + \frac{\partial\mu_1}{\partial t} + \nabla \cdot (\mu_0\mathbf{v}_1) + \underbrace{\nabla \cdot (\mu_1\mathbf{v}_1)}_{\text{ordre 2}} &= 0 \end{aligned}$$

dans le cadre d'un développement au premier ordre nous gardons donc :

$$\mu_0 \frac{\partial\mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 \quad \text{et} \quad \frac{\partial\mu_1}{\partial t} + \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \quad \text{et} \quad \mu_1 = \chi_s \mu_0 p_1$$

1.4 Bilan des hypothèses : approximation acoustique

Nous avons été amenés à faire quelques hypothèses qui ensemble portent le nom d'approximation acoustique :

- Le fluide dans lequel l'onde se propage est un fluide parfait.
- On néglige les effets de pesanteur sur le fluide.
- Les variations relatives de μ et p sont petites.

1.5 Équation de D'ALEMBERT

Notre système d'équations mène à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \mu_1}{\partial t} + \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \\ \mu_1 = \chi_s \mu_0 p_1 \end{array} \right. \implies \left. \begin{array}{l} \chi_s \mu_0 \frac{\partial p_1}{\partial t} + \mu_0 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 = 0 \\ \mu_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} = -\nabla p_1 \end{array} \right\} \implies \begin{array}{l} \mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2} - \nabla^2 p_1 = 0 \\ \text{ou} \\ \mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 \mathbf{v}_1}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{v}_1 = 0 \\ \text{ou} \\ \mu_0 \chi_s \frac{\partial^2 \mu_1}{\partial t^2} - \nabla^2 \mu_1 = 0 \end{array}$$

On reconnaît une équation de D'ALEMBERT pour des ondes sonores qui se propagent à la célérité $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_s}}$, et l'on justifie ici que les ondes sonores sont souvent qualifiées de « ondes de pression » ou « ondes de densité ».

2. Célérité

To-Do Il y a certainement des choses à dire sur la dispersion. En particulier concernant les exemples avec l'hélium et l'argon.

2.1 Gaz parfaits

Dans l'étude des gaz parfaits, l'hypothèse isentropique doit rappeler la loi de LAPLACE : $pV^\gamma = \text{cste}$. De cette loi on déduit directement $p\mu^{-\gamma} = \text{cste}$ puis, par dérivation logarithmique :

$$\frac{dp}{p} = \gamma \frac{d\mu}{\mu} \implies \frac{p_1}{p_0} = \gamma \frac{\mu_1}{\mu_0}$$

finalement, avec T_0 la température et M la masse molaire du gaz, la loi des gaz parfait et l'une des relations précédentes permettent d'obtenir :

$$\chi_s = \frac{1}{\gamma p_0} \implies c = \sqrt{\frac{\gamma p_0}{\mu_0}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_0}{M}}$$

Gaz	M (g mol ⁻¹)	T_0 (°C)	γ [21]	c (m s ⁻¹) [45]
hélium	4,00	20	1,660	264
air sec	28,97	0	1,403	332
air sec	28,97	20	1,400	343
air saturé en eau		20	1,400	345
dioxygène	31,99	20	1,400	326
argon	39,95	20	1,670	323

On constate qu'à γ constant, la célérité est plus faible dans les gaz plus « lourds ». En particulier humidifier l'air apporte de l'eau, ce qui *diminue* M ($M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \text{ g mol}^{-1}$), donc augmente c .

2.2 Liquides

Pour les liquides, l'ordre de grandeur de c est différent :

Fluide	μ_0 (kg m ⁻³)	χ_s (Pa ⁻¹)	c (m s ⁻¹) [45]
eau	1000	5×10^{-10}	1410
eau de mer			1449
acétone			1203

2.3 Solides

En dehors du cadre de notre étude, on peut donner quelques valeurs :

NOTES Dans les solides, les ondes acoustiques peuvent être longitudinales mais aussi transversales, les deux types d'ondes ne se propagent pas avec la même célérité. On donne ici les célérités longitudinales.

Solide	c (m s ⁻¹) [45]
aluminium	6420
cuiivre	5010
acier (1 %C)	5940
verre (pyrex)	5640
caoutchouc	1550
polystyrène	2350

Ces valeurs donnent une idée de l'ordre de grandeur, mais sont variables.

3. Aspect énergétique

3.1 Densité d'énergie et flux d'énergie

Les ondes transportent de l'énergie. On note $\mathbf{\Pi}$ et l'on appelle vecteur de POYNTING, le vecteur associé aux flux d'énergie porté par l'onde. Sa norme est homogène à des W m⁻² et sa direction est celle de propagation de l'énergie.

Dans le cas des ondes acoustiques les forces de pressions qui s'exercent entre particules fluides voisines sont associées à une puissance surfacique vp_1 de sorte que, finalement, $\mathbf{\Pi} = vp_1$. L'équation de continuité pour la densité d'énergie doit s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial t} &= -\nabla \cdot \mathbf{\Pi} = p_1 \nabla \cdot \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_1 \nabla p_1 \\ &= p_1 \left(-\chi_s \frac{\partial p_1}{\partial t} \right) + \mathbf{v}_1 \left(-\mu_0 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

d'où :

$$\nabla \cdot \mathbf{\Pi} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\chi_s p_1^2}{2} + \frac{\mu_0 v_1^2}{2} \right)$$

On reconnaît la densité d'énergie cinétique, et on déduit l'expression de la densité d'énergie potentielle :

$$e_c = \frac{1}{2}\mu_0 v_1^2 \quad \text{et} \quad e_p = \frac{1}{2}\chi_s p_1^2$$

3.2 Niveau sonore

NOTES

Les résultats de cette section sont valables pour les OPPH, dont on discutera juste après s'il reste du temps. On arrive à l'expression suivante simplement si l'on exprime v et p pour les OPPH. Comme c'est un petit calcul simple à faire et dont on a l'habitude avec l'électromagnétisme je ne le traite pas tout de suite dans le cadre de cette présentation, même si il apporte d'autres informations importantes.

La valeur moyenne du vecteur de POYNTING donne l'intensité sonore :

$$I \equiv \langle \|\mathbf{\Pi}\| \rangle = \frac{1}{2}\mu_0 c v_{10}^2$$

c'est à cette grandeur que l'oreille humaine est sensible, mais la perception est logarithmique de sorte que l'on définit le *niveau sonore* en décibel, relatif au seuil d'audibilité de l'oreille humaine I_0 :

$$I_{\text{dB}} = 10 \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \quad \text{avec} \quad I_0 = 10^{-12} \text{ W m}^{-2}$$

	I (W m ⁻²)	I_{dB} (dB)	p_1 (Pa)	μ_1 (kg m ⁻³)	v_1 (m s ⁻¹)
Seuil auditif (2 kHz)	10 ⁻¹²	0	10 ⁻⁵	10 ⁻¹⁰	10 ⁻⁷
Chuchotement	10 ⁻¹¹	10	10 ⁻⁴	10 ⁻⁹	10 ⁻⁷
Campagne	10 ⁻⁹	30	10 ⁻³	10 ⁻⁸	10 ⁻⁶
Avenue	10 ⁻⁴	80	10 ⁻¹	10 ⁻⁶	10 ⁻³
Marteau piqueur	10 ⁻²	100	1	10 ⁻⁵	10 ⁻³
Seuil de douleur	1	120	10 ¹	10 ⁻⁴	10 ⁻²
Ambiant (p_0, μ_0)			$p_0 \approx 10^5$	$\mu_0 \approx 1$	

3.3 Justification des hypothèses avancées

NOTES

Il faut absolument traiter cette partie.

3.3.1 Suppression, surdensité, vitesse

Le tableau précédent dans lequel des ordres de grandeur sont présentés permet de conclure que les hypothèses $p_1 \ll p_0$ et $\mu_1 \ll \mu_0$ sont validées.

3.3.2 Absence de transfert thermique

Pour une onde de pulsation f , le transfert thermique est lié aux variations de température associées aux variations de pression.

- La diffusion thermique est caractérisée par le coefficient de diffusion D et se fait sur des distances de l'ordre de $\sqrt{D/f}$.
- Les zones de surpression et souspression sont séparées de $\lambda/2 = c/2f$.

Le transfert thermique par diffusion est négligeable si :

$$\sqrt{D/f} \ll \frac{c}{2f} \implies f \ll \frac{c^2}{4D}$$

On peut faire quelques applications numériques, et l'on remarque que le domaine audible (jusqu'à 20×10^3 Hz) vérifie largement l'inégalité.

Fluide	c (m s ⁻¹)	D (m ² s ⁻¹)	$c^2/4D$ (Hz)
Air	340	2×10^{-5}	1×10^{10}
Eau	1500	1×10^{-7}	5×10^{12}

4. Propagation des ondes planes [16]

4.1 Relation de dispersion

En représentation harmonique l'équation de D'ALEMBERT donne, avec :

$$\underline{p}_1 = p_{10} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad \underline{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{v}_{10} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad \underline{\mu}_1 = \mu_{10} e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

pour la convention de signe, puis :

$$\omega^2 \underline{p}_1 - \frac{\mathbf{k}^2}{c^2} \underline{p}_1 = 0$$

d'où la relation de dispersion :

$$c = \pm \frac{\omega}{k}$$

le signe est à choisir selon la direction de propagation. La propagation est ici non dispersive, ce résultat est conséquence de notre hypothèse sur la linéarité de l'équation d'état.

4.2 Caractère longitudinal

L'équation d'EULER au premier ordre devient :

$$\mu_0 \omega \underline{\mathbf{v}}_1 = \mathbf{k} \underline{p}_1$$

les vecteurs $\underline{\mathbf{v}}_1$ (qui représente le déplacement des particules fluide) et \mathbf{k} (vecteur d'onde) sont colinéaires : les ondes acoustiques dans les fluides sont longitudinales.

4.3 Énergie cinétique et potentielle

Nous avons établi la relation $\mu_0 \omega v_1 = k p_1$ qui donne un lien entre la surpression et la vitesse des particules :

$$v_1 = \frac{k}{\omega \mu_0} p_1 = \frac{1}{c \mu_0} p_1 = \sqrt{\frac{\chi_s}{\mu_0}} p_1$$

de cela on déduit :

$$e_c = \frac{1}{2}\chi_s p_1^2 = \frac{1}{2}\mu_0 v_1^2 = e_p = \frac{e}{2}$$

Pour les OPPH l'énergie est équitablement répartie entre l'énergie potentielle et l'énergie cinétique. En valeur moyenne pour la densité d'énergie on a localement :

$$\langle e \rangle = \langle \mu_0 v_1^2 \rangle = \frac{1}{2}\mu_0 v_{10}^2 = \frac{1}{2}\chi_s p_{10}^2$$

4.4 Impédances, dioptries

NOTES Normalement on a pas le temps d'arriver là...

LP 26 : Propagation avec dispersion

Dans les leçons sur les ondes, nous travaillons souvent avec un outil mathématique très utile : l'onde plane progressive monochromatique (on utilise $\underline{X}(z, t) = x_0 e^{i(\omega t - kz + \varphi)}$), dont la propagation est décrite par l'équation de D'ALEMBERT.

L'expérience a montré que les vitesses de propagation d'ondes planes de pulsations différentes sont elles aussi différentes. Dès lors, il semble compliqué de modéliser la propagation d'un *signal* avec l'équation de D'ALEMBERT et les OPPM.

Dans cette leçon nous allons donc étudier la propagation de signaux composés : nous établirons des relations de dispersions plus générales que celles déjà connues (dans différents domaines de la physique), nous introduirons formellement le concept de *paquet d'onde* déjà évoqué, ainsi que les grandeurs appelées *vitesse de groupe* et *vitesse de phase*.

Ces notions présenteront des intérêts en communication, en mécanique quantique, et très généralement en modélisation de phénomènes physiques.

1. Une nouvelle équation de propagation

1.1 Nécessité et origine de la nouvelle équation

NOTES

Nécessité Signal ne dure pas depuis toujours : TF = signal composé = non harmonique ; + expérience (= dispersion) => D'ALEMBERT à généraliser

Origine On pourrait étudier un cas très abstrait où $c = f(\omega)$ directement dans D'ALEMBERT mais, en général, on peut modéliser le milieu et obtenir une équation différentielle meilleure que D'ALEMBERT.

Exemple : ondes sur une corde vibrante [16] Sur la corde vibrante, l'équation de propagation obtenue, lorsque l'on prend en compte des frottements fluides avec l'air proportionnels à la vitesse, est :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \beta \frac{\partial y}{\partial t}$$

où μ est la masse linéique, T_0 la tension dans la corde, β un coefficient de frottement ($\text{s m}^{-2} = (\text{kg/m/s})/\text{N}$).

Parfois, lorsque les vitesses sont grandes, on modélise les frottements par une force $\propto \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$. On peut aussi faire ce choix ici, mais nous allons voir qu'il rendra la situation plus compliquée.

1.2 Équation linéaire, décomposition harmonique

On considère des ondes quelconques dans un milieu quelconque, régies par une équation différentielle du type :

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} = f(s)$$

Le premier membre correspond à ce que l'on connaît déjà, le second membre va nous permettre de généraliser. L'une des propriétés très utile utilisée jusqu'ici dans l'étude des ondes des équations différentielles est que, lorsque l'équation est linéaire les combinaisons linéaires de solutions sont aussi solution. Cela, associé aux travaux de FOURIER sur les ondes, nous permettait d'étudier une seule onde plane progressive monochromatique.

Si la fonction $f(s)$ est linéaire, le raisonnement reste valide : on peut étudier la propagation d'une seule composante, généraliser le résultat aux autres, et utiliser la transformée de FOURIER pour étudier la propagation d'un signal. C'est pourquoi, sur la corde vibrante, il sera plus aisé d'étudier les cas où l'on considère des frottements $\propto \frac{\partial y}{\partial t}$.

Dans d'autres domaines de la physique, l'étude du milieu de propagation permet très souvent d'écrire une relation linéaire, dans le cadre de certaines approximations, quelques exemples sont regroupés dans le tableau ci-dessous. On y trouvera aussi l'équation différentielle pour l'OPPM en notation complexe, choisie avec la convention pour les signes : $\underline{s}(x, t) = s_0 e^{i(\omega t - kx)}$.

Domaine	Équation différentielle	Représentation harmonique
Corde vibrante avec frottements $y(x, t)$ [16]	$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\mu}{T_0} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \beta \frac{\partial y}{\partial t}$	$k^2 \underline{y} - \frac{\mu}{T_0} \omega^2 \underline{y} = -i\omega \beta \underline{y}$
Plasma $\underline{\mathbf{E}}(x, t)$ [3]	$\frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = \mu_0 \sigma \frac{\partial \underline{\mathbf{E}}}{\partial t}$	$k^2 \underline{\mathbf{E}} - \frac{1}{c^2} \omega^2 \underline{\mathbf{E}} = -\frac{\omega_p^2}{c^2} \underline{\mathbf{E}}$
Câble coaxial avec pertes $u(x, t)$ [16]	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = (r\Gamma + \Lambda g) \frac{\partial u}{\partial t}$	$k^2 \underline{u} - \frac{1}{c^2} \omega^2 \underline{u} = -i\omega (r\Gamma + \Lambda g) \underline{u}$

En reprenant la corde vibrante, nous pouvons obtenir une relation entre k et ω :

$$k^2 = \frac{\mu}{T_0} \omega^2 - i\omega \beta \implies \underline{k}(\omega) = k'(\omega) - ik''(\omega)$$

Cette relation est la *relation de dispersion* que nous allons interpréter.

1.3 Relation de dispersion

Pour la propagation d'une onde dans un milieu où la relation de dispersion est connue, on écrit pour l'onde plane monochromatique :

$$\underline{s}(x, t) = s_0 e^{i(\omega t - kx)} = s_0 e^{i(\omega t - k'x)} e^{-k''x}$$

On lit dans cette écriture, que la partie réelle k' de k va jouer un rôle similaire à celui déjà connu, tandis que la partie imaginaire k'' va modifier l'amplitude de l'onde au cours

de sa propagation, plus précisément elle va (en général, sauf dans certains milieux actifs) l'atténuer avec $k'' > 0$, sur une distance caractéristique $\delta = \frac{1}{|k''|}$.

La vitesse de propagation de cette onde plane monochromatique est déterminée en suivant un plan d'onde entre deux instants (on fait abstraction de l'atténuation) :

$$\begin{aligned} \underline{s}(x, t) = \underline{s}(x + dx, t + dt) &\implies \omega t - k'(\omega)x = \omega(t + dt) - k'(\omega)(x + dx) \\ &\implies 0 = \omega dt - k'(\omega)dx \\ &\implies v_\varphi \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k'(\omega)} \end{aligned}$$

On l'a vu, $k'(\omega)$ n'est pas forcément une relation de proportionnalité. Cette vitesse, dite *vitesse de phase* va donc dépendre de la fréquence de l'OPPM dans les milieux dispersifs (où $k' \neq \omega/c$).

Pour la corde, si l'on supprime les frottements, on retrouve bien la relation de dispersion $k' = \frac{\omega}{T_0/\mu}$ et donc une vitesse de phase T_0/μ indépendante de la fréquence, et $k'' = 0$.

Le plasma est un cas d'étude intéressant car la relation de dispersion :

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_p^2}{c^2} \implies k = \frac{1}{c} \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2}$$

va permettre de distinguer aisément deux domaines de fréquences. La pulsation ω_p appelée pulsation plasma; pour $\omega > \omega_p$, $k = k' \in \mathbb{R}$ tandis que pour $\omega < \omega_p$, $k = ik'' \in i\mathbb{R}$. Le premier cas correspond à un milieu dispersif non absorbant, le second cas correspond à un milieu absorbant (pas de propagation). On étudie donc, dans la suite, la propagation d'ondes électromagnétiques dans un plasma, la vitesse de phase étant donnée par : $v_\varphi(\omega) = \frac{c}{\sqrt{1 - \omega_p^2/\omega^2}} > c$.

La propagation d'ondes électromagnétiques dans un plasma peut sembler très théorique, mais notons que l'une des couches atmosphérique (l'ionosphère 90 km – 120 km, voir Wikipédia pour plus de détails) est constituée de gaz peu dense, en permanence ionisé par le rayonnement solaire. L'ionosphère constitue alors un bon exemple de plasma. La communication avec des satellites nécessite de traverser cette couche atmosphérique.

On a noté en toute légèreté : $v_\varphi > c$, ce résultat doit interpeler. Dès l'introduction à cette leçon, nous discutons le problème que posent les ondes planes progressives monochromatiques : dans des milieux dispersifs elles ne se propagent pas toutes à la même vitesse, et ne sont mathématiquement correctes que pour des étendues temporelle et spatiale infinies, elle restent malgré cela de bons outils de calculs. Lorsque l'on veut envoyer un *signal* on émet une onde finie, alors nécessairement composée de plusieurs fréquences (sa transformée de FOURIER n'est pas un pic de DIRAC, ça n'est pas une OPPM). Nous allons maintenant étudier la propagation d'un signal réel pour voir si lui aussi se propage avec une vitesse supérieure à c .

2. Propagation de paquets d'ondes

2.1 Signaux réels, mais simples

Plutôt qu'une OPPM, on veut un « bip » si possible simple à exprimer en terme d'onde.

Nous avons déjà mentionné que la linéarité de l'équation de propagation nous permet d'utiliser des combinaisons linéaires de solutions pour en trouver d'autres. Les OPPM sont des solutions, nous allons alors créer une autre solution $\underline{s}(x, t)$:

$$\underline{s}(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s_0(\omega) e^{i(\omega t - k(\omega)x)} d\omega$$

choisissons s_0 assez simple, du type $s_0(\omega) = e^{(\omega - \omega_0)^2 / 2\sigma^2}$.

2.2 Évolution [46]

Pour $\sigma \ll \omega_0$, nous dirons que seul les composantes ω proches de ω_0 ont de l'importance. Nous pourrions étudier la relation de dispersion au premier ordre :

$$k(\omega) \approx k_0 + (\omega - \omega_0) \left. \frac{\partial k}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} \quad \text{avec} \quad k_0 = k(\omega_0)$$

Alors en calculant l'amplitude $\underline{s}(x, t)$:

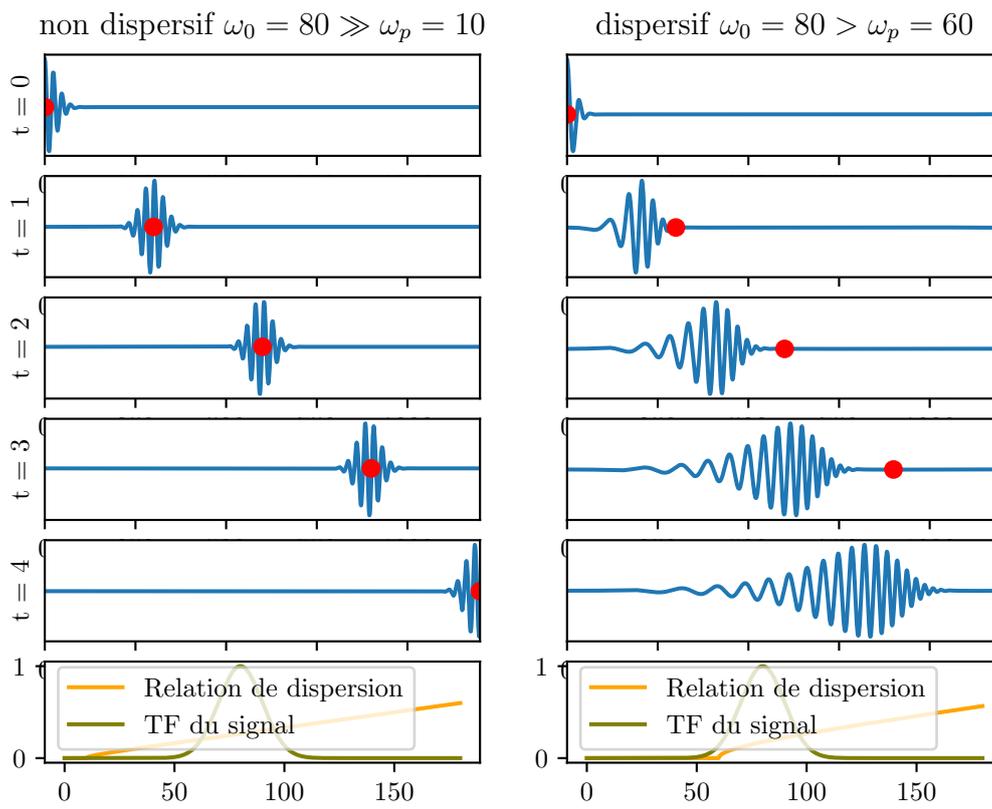
$$\begin{aligned} \underline{s}(x, t) &= \int s_0(\omega) e^{i\left(\omega t - k_0 x - (\omega - \omega_0) \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} x\right)} d\omega \\ &= e^{i\left(-k_0 x + \omega_0 \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} x\right)} \int s_0(\omega) e^{i\left(\omega t - \omega \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0}\right)} d\omega \\ &= e^{i\left(-k_0 x + \omega_0 \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} x\right)} \int s_0(\omega) e^{i\omega \left(t - \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0}\right)} d\omega \\ &= e^{i\left(-k_0 x + \omega_0 \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} x\right)} \int s_0(\omega) e^{i\omega t'} d\omega \end{aligned}$$

en posant $t' = t - \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0}$, on reconnaît alors :

$$\underline{s}(x, t) = e^{i\left(-k_0 x + \omega_0 \left. \frac{dk}{d\omega} \right|_{\omega_0} x\right)} \underline{s}(0, t')$$

Le signal s en x à l'instant t correspond au signal qui était en $x = 0$ à l'instant $t' = t - \frac{1}{v_g} x$, avec $v_g = \frac{d\omega}{dk}$ sa *vitesse de groupe*. On peut comprendre graphiquement, en traçant $s(x, t)$ à plusieurs instants successifs.

Propagation d'un paquet d'ondes



To-Do Discuter du prix Nobel 2018!

To-Do Solitons?

LP 27 : Propagation guidée des ondes

1. Intérêt du guidage

2. Notions pour le guidage [68, 70, 35, 72]

2.1 Réflexion d'une onde sur une surface

Py-Do Montrer que lors de la réflexion d'une onde incidente sur un plan un front d'onde résultant se propage parallèlement au plan.

2.2 Onde guidée

Une onde se propage dans la direction \mathbf{e}_z dans un région de l'espace infinie, d'axe \mathbf{e}_z délimitée par des surfaces réfléchissantes.

2.3 Équation de HELMOLTZ

Les champs peuvent s'écrire dans le cas général :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x, y, z, t) &= \mathbf{E}(x, y)e^{i(\omega t - k_z z)} \\ \mathcal{B}(x, y, z, t) &= \mathbf{B}(x, y)e^{i(\omega t - k_z z)}\end{aligned}$$

L'équation de propagation pour \mathbf{E} est celle de D'ALEMBERT :

$$\nabla^2 \mathcal{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0} \implies \nabla^2 \mathcal{E} + \frac{\omega^2}{c^2} \mathcal{E} = \mathbf{0}$$

or les dérivées spatiales donnent :

$$\nabla^2 \mathcal{E} = \nabla^2 \mathbf{E} \cdot e^{i(\omega t - k_z z)} - k_z^2 \mathcal{E}$$

donc l'équation de propagation devient :

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \mathbf{E} = \mathbf{0}$$

c'est l'équation de HELMOLTZ. Pour la propagation du champ magnétique on obtient la même équation.

2.4 Solutions transverses

Dans le cas général on peut décomposer \mathbf{E} et \mathbf{B} en une composante tangentielle et une composante longitudinale vis-à-vis de la propagation :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_t(x, y) + E_z(x, y)\mathbf{e}_z \quad \text{et} \quad \mathbf{B} = \mathbf{B}_t(x, y) + B_z(x, y)\mathbf{e}_z$$

On appelle *transverse électriques* les solutions pour lesquelles la composante E_z est nulle, et *transverse magnétique* les solutions pour lesquelles la composante B_z est nulle. Ces solutions sont plus simples à étudier que les solutions générales.

3. Guide d'onde rectangulaire [37]

3.1 Description

On étudie un guide d'onde illimité dans la direction \mathbf{e}_z dont la section droite est rectangulaire ($0 < x < a$ et $0 < y < b$) et délimitée par des surfaces parfaitement conductrices. On assimile le milieu intérieur au vide.

On commence l'étude avec une onde qui vérifie $\mathbf{E} = E_0(x, y)\mathbf{e}_y$ qui en plus d'être transverse électrique s'accorde bien avec la symétrie du problème.

3.2 Conditions aux limites pour les champs

Les conditions aux limites pour le champ électromagnétique sont associées aux relations de passage aux surfaces :

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{E} &= \frac{\sigma}{\epsilon_0}\mathbf{n} \\ \delta\mathcal{B} &= \mu_0\mathbf{j}_s \times \mathbf{n}\end{aligned}$$

Pour le champ électrique considéré ici les surfaces des conducteurs imposent donc :

$$E_0(x=0, y) = 0 = E_0(x=a, y)$$

3.3 Forme des champs en solution TE

3.3.1 Champ \mathcal{E}

Comme $\nabla \cdot \mathcal{E} = 0$ on va pouvoir simplifier l'équation de propagation :

$$\nabla \cdot \mathcal{E} = e^{i(\omega t - k_z z)} \cdot \nabla \cdot \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \nabla (e^{i(\omega t - k_z z)})$$

le gradient dans le deuxième terme est parallèle à \mathbf{e}_z donc il reste :

$$e^{i(\omega t - k_z z)} \cdot \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \implies \nabla \cdot \mathbf{E} = 0 \implies \frac{\partial E_0(x, y)}{\partial y} = 0$$

on trouve que E_0 ne dépend en fait pas de y . Alors l'équation de propagation est :

$$\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} + \left(\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) E_0 = 0$$

Cette équation différentielle est connue, ses solutions sont de différents types, en posant $k^2 \equiv \omega^2/c^2 - k_z^2$ les solutions sont :

$$\begin{aligned}\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 < 0 &\implies E_0(x) = C e^{-kx} \\ \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 > 0 &\implies E_0(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)\end{aligned}$$

Pour ne garder que des solutions compatibles avec les conditions aux limites, on ne retient que le cas oscillant où $k_z^2 < \omega^2/c^2$, et on doit poser $A = 0$ avec $ka = p\pi, p \in \mathbb{N}$.

Finalement, le champ électrique \mathcal{E} présent dans le guide va pouvoir se décomposer sur la base des solutions qui s'écrivent :

$$\mathcal{E}_p(x, y, z, t) = E_{p,0} \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) e^{i(\omega t - k_z z)} \mathbf{e}_y$$

ces solutions constituent l'ensemble des *modes* TE pour une onde de pulsation ω . L'onde est progressive selon \mathbf{e}_z et stationnaire selon \mathbf{e}_x ; dans les plans où $z = \text{cste}$ l'amplitude varie.

3.3.2 Champ \mathcal{B}

L'équation de HELMOLTZ étant valable pour \mathcal{B} et les conditions aux limites étant connues on pourrait procéder de la même manière pour déterminer la forme de \mathcal{B}_p . Mais l'équation de MAXWELL-FARADAY permet d'arriver au résultat plus rapidement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{B}_p}{\partial t} &= -\nabla \times \mathcal{E}_p \\ &= \left(-\frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_x + \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{e}_z \right) \mathcal{E}_y \end{aligned}$$

après dérivations puis intégration on trouve :

$$\mathcal{B}_p = -E_{p,0} \left(\frac{k_z}{\omega} \sin\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \mathbf{e}_x + i \frac{p\pi}{\omega a} \cos\left(\frac{p\pi x}{a}\right) \mathbf{e}_z \right) e^{i(\omega t - k_z z)}$$

3.3.3 Structure de l'onde électromagnétique

Contrairement à ce que l'on trouve pour la propagation libre des ondes électromagnétiques, l'onde obtenue ici n'est pas plane (on en a déjà discuté) mais en plus n'est pas transverse (on n'a pas $\mathbf{E} \perp \mathbf{B} \perp \mathbf{k}$) puisque la partie magnétique porte une composante selon \mathbf{e}_z . Le vecteur de POYNTING lui, est bien dirigé selon \mathbf{e}_z .

La structure de l'onde ne dépend pas que du milieu, mais aussi des conditions aux limites.

To-Do | Vérifier dans quelle mesure la forme des champs en solution TM est semblable (la relation de dispersion est la même).

3.4 Dispersion

On a trouvé lors de l'exploitation des conditions aux limites la relation de dispersion :

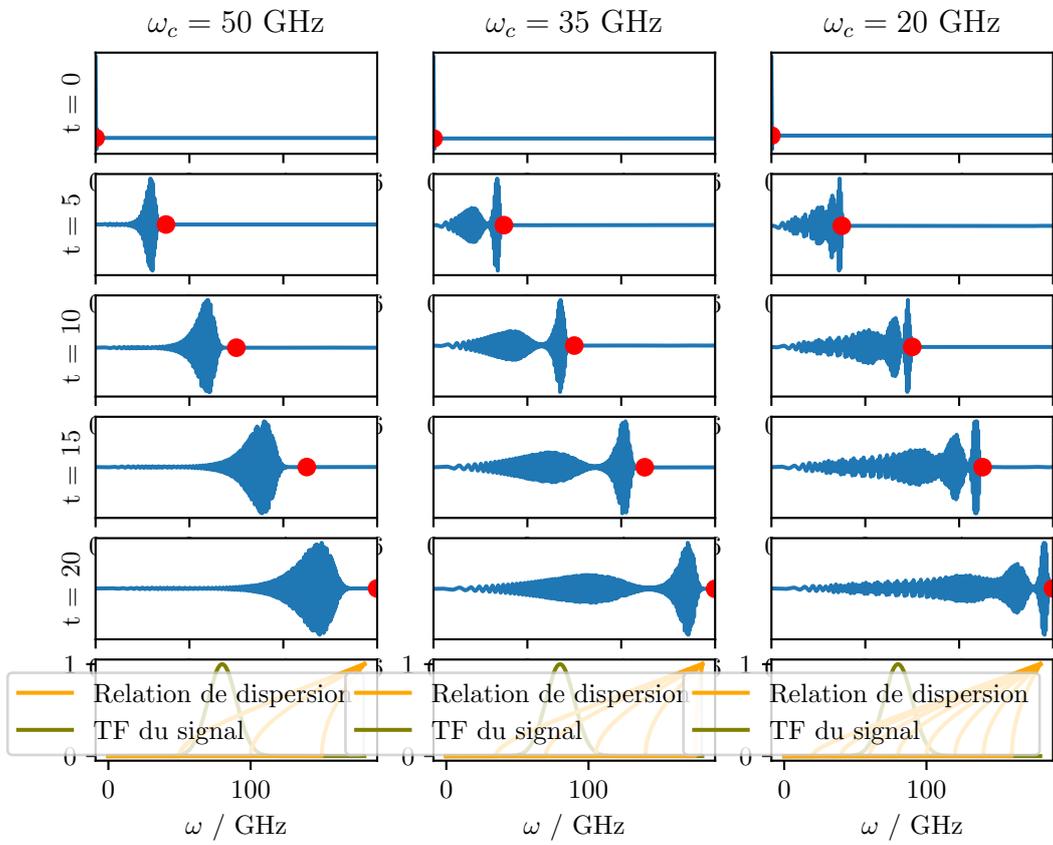
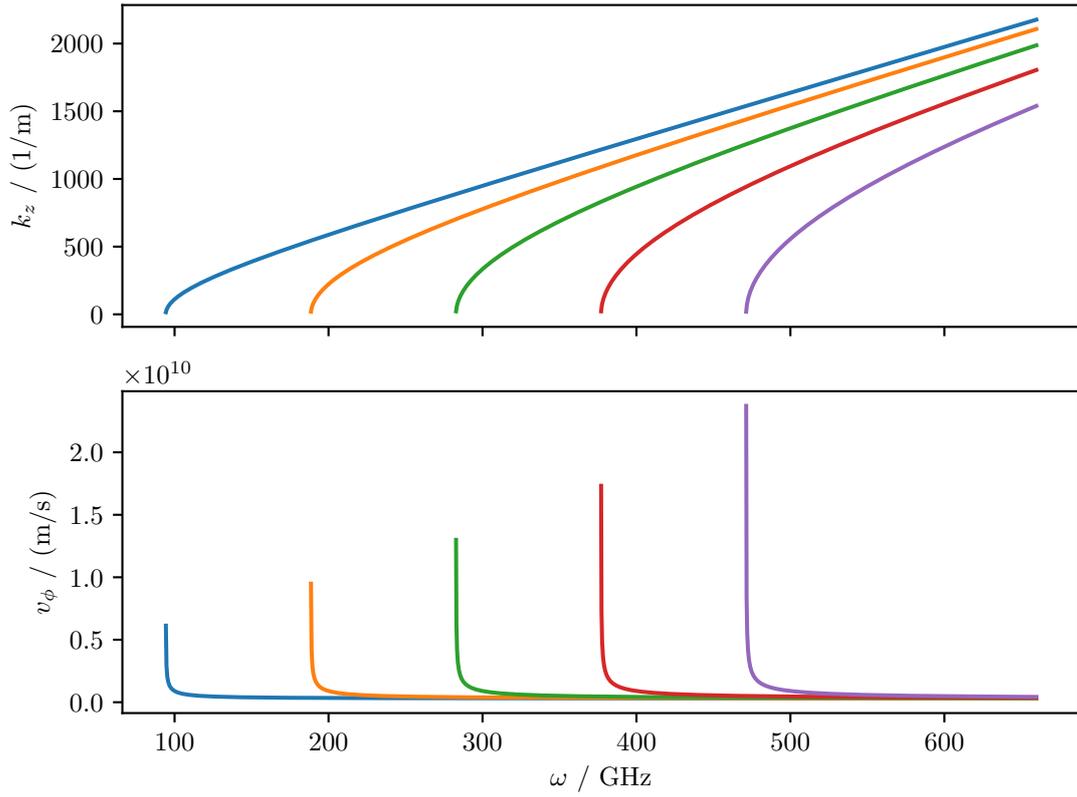
$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - \left(\frac{p\pi}{a}\right)^2$$

le guide d'onde est donc dispersif même si l'onde se propage dans le vide à l'intérieur. Pour garder k_z réel on a une pulsation de coupure pour chaque mode :

$$\omega_{c,p} = \frac{p\pi c}{a}$$

les k_z s'écrivent alors :

$$k_z^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{c,p}^2}{c^2}$$



3.5 Modèles équivalents

3.5.1 Courants et charges en surface

NOTES | On ne pourra pas trouver un modèle similaire au câble coaxial puisqu'ici il n'y a qu'un seul conducteur.

3.5.2 Solutions en ondes planes

NOTES | Rayons lumineux ?

LP 28 : Ondes électromagnétiques dans les milieux diélectriques

Prérequis Électrostatique : $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide

Dans le cours d'électrostatique nous avons vu que la présence d'un diélectrique dans un condensateur modifiait sa capacité, car le milieu se polarisait ce qui avait pour effet de modifier le champ électrique qui y était présent.

Nous avons déjà étudié la propagation des ondes électromagnétiques dans le vide. Puisque la présence d'un diélectrique influe sur le champ électrique, on peut supposer que la présence d'un diélectrique va influencer sur la propagation des ondes.

MANIP' On propose d'essayer une expérience bien connue : on place un prisme sur le chemin d'un faisceau lumineux.

1. Équations de MAXWELL dans les milieux diélectriques

On rappelle les équations de MAXWELL dans la matière :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= \rho_{\text{libre}} & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{H} &= \mu_0 \mathbf{j}_{\text{libre}} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \end{aligned}$$

avec les vecteurs *déplacement électrique* et *excitation magnétique* qui sont liés à la *polarisation* et à l'*aimantation* selon :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad \text{et} \quad \mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}$$

Dans un milieu diélectrique non magnétique parfaitement isolant, les seules charges présentes sont les charges de polarisation, de même que les seuls courants présents sont les courants de polarisation. On peut donc réécrire :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \end{aligned}$$

On se trouve ici avec un vecteur \mathbf{D} qui est la seule différence que l'on va faire entre le vide et les diélectriques. On connaît $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$, mais nous n'avons pas d'expression pour \mathbf{P} .

On pourrait se lancer dans une étude abstraite de la propagation des ondes en proposant une relation de structure très générale comme :

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 [\chi_1(r, \omega)] \mathbf{E} + \epsilon_0 [\chi_2(r, \omega)] \mathbf{E} \mathbf{E} + \dots$$

mais on préfère développer un modèle microscopique qui permettra de justifier des approximations et les nouvelles notions (notamment le $\underline{n} = n' + in''$ complexe).

2. Modèle microscopique de la polarisation

2.1 Modèle de l'électron élastiquement lié (polarisation électronique)

NOTES Aller vite, tracer χ' et χ'' .

To-Do Donner des ordres de grandeur !

2.2 Autres types de polarisation

NOTES Quelque mots ou des schémas seulement.

2.2.1 Polarisation ionique

2.2.2 Polarisation de rotation

3. Propagation des ondes électromagnétiques dans les diélectriques

3.1 Équation de propagation

Pour une onde de pulsation ω connue, on peut calculer d'une part :

$$\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{E}}) = \nabla \times \left(-\frac{\partial \underline{\mathbf{B}}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \epsilon(\omega) \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial t^2}$$

et écrire d'autre part :

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{E}}) &= \nabla(\nabla \cdot \underline{\mathbf{E}}) - \nabla^2 \underline{\mathbf{E}} \\ &= \frac{1}{\epsilon} \nabla(\nabla \cdot \underline{\mathbf{D}}) - \nabla^2 \underline{\mathbf{E}} \\ &= -\nabla^2 \underline{\mathbf{E}} \end{aligned}$$

on obtient alors une équation de D'ALEMBERT pour le vecteur $\underline{\mathbf{E}}$:

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{E}} - \mu_0 \epsilon(\omega) \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0$$

Cette relation est très similaire à celle que l'on trouve dans le vide, la seule modification étant la vitesse de propagation :

$$\nabla^2 \underline{\mathbf{E}} - \frac{\epsilon_r(\omega)}{c^2} \frac{\partial^2 \underline{\mathbf{E}}}{\partial t^2} = 0$$

Sous cette forme, on lit que la composante électrique en représentation complexe du champ électromagnétique se propage dans les diélectriques à une vitesse : $v = c/\epsilon_r^{1/2}(\omega) \equiv c/\underline{n}(\omega)$, où l'on appelle *indice optique complexe* la grandeur $\underline{n}(\omega)$. En calculant de la même manière $\nabla \times (\nabla \times \underline{\mathbf{B}})$ on trouverait la même équation de propagation pour la composante magnétique du champ.

3.2 Structure des ondes planes

Avec l'équation de MAXWELL-FARADAY :

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \underline{\mathbf{B}}}{\partial t} \implies i\mathbf{k} \times \underline{\mathbf{E}} = i\omega \underline{\mathbf{B}}$$

on trouve que les vecteurs \mathbf{k} , \mathbf{E} et \mathbf{B} forment un trièdre direct, comme dans le vide. Puisque \mathbf{D} et \mathbf{E} sont collinéaires, \mathbf{D} forme aussi un trièdre avec les deux autres vecteurs.

3.3 Dispersion et atténuation

On rappelle que l'on considère des ondes planes pour lesquelles on utilise la représentation harmonique :

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}r)} \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{B}}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k}r)}$$

Avec l'équation de D'ALEMBERT qui donne la relation de dispersion :

$$\underline{\mathbf{k}}^2 = \frac{\underline{n}^2(\omega)}{c^2} \omega^2 \implies \underline{\mathbf{k}} = \frac{\omega \underline{n}(\omega)}{c} \mathbf{u}$$

on obtient pour les champs, dans le cas d'une propagation unidirectionnelle où $\mathbf{k}r = \underline{k}r$:

$$\underline{\mathbf{E}} = \underline{\mathbf{E}}_0 e^{i\omega(t - r \underline{n}(\omega)/c)} \quad \text{et} \quad \underline{\mathbf{B}} = \underline{\mathbf{B}}_0 e^{i\omega(t - r \underline{n}(\omega)/c)}$$

L'indice optique complexe \underline{n} pose problème car dans l'équation de D'ALEMBERT il semble indiquer que les champs se propagent avec une vitesse complexe. Nous allons résoudre ce problème avec une interprétation correcte, écrivons : $\underline{n} = n' - in''$. Dans ce cas :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{E}} &= \underline{\mathbf{E}}_0 e^{i\omega(t - r \underline{n}(\omega)/c)} = \underline{\mathbf{E}}_0 e^{i\omega t} e^{-ir\omega \underline{n}(\omega)/c} \\ &= \underline{\mathbf{E}}_0 e^{i\omega t} e^{-ir\omega n'(\omega)/c} e^{-r\omega n''(\omega)/c} \end{aligned}$$

De cette égalité on peut exprimer le champ \mathbf{E} réel :

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-r\omega n''(\omega)/c} \cos\left(\omega\left(t - r \frac{n'(\omega)}{c}\right)\right)$$

on voit ici que la partie imaginaire de l'indice optique complexe correspond à un coefficient d'atténuation de l'amplitude du champ électrique.

On peut aussi écrire l'équation de D'ALEMBERT pour le champ électrique :

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{n'^2(\omega)}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0$$

et voire que la partie réelle de l'indice optique complexe correspond à l'indice optique de l'optique géométrique, qui donne la vitesse de propagation du champ électrique : $v(\omega) = \frac{c}{n'(\omega)}$. Puisque v dépend de ω , on peut dire que le milieu est dispersif, la relation de dispersion étant : $k'(\omega) = \frac{\omega}{c} n'(\omega)$.

4. Développement limité dans le visible : loi de CAUCHY

NOTES $\omega \ll \omega_0$

LP 29 : Ondes électromagnétiques dans les milieux conducteurs

1. Description des milieux conducteurs [41]

1.1 Modèle de la conductivité

Modèle de DRUDE en régime harmonique très rapidement : on trouve une conductivité complexe.

1.2 Équations de MAXWELL

Équations adaptées à l'étude : en tenant compte de \mathbf{j}_f et ρ_f .

1.3 Régime transitoire, régime permanent

$\nabla \cdot (\mathbf{j}_f) = -\partial\rho_f/\partial t \implies \rho_f = \rho_0 e^{-t/\tau}, \tau = \sigma/\epsilon$ Temps caractéristique ($\approx 10^{-14}$ s pendant lequel les charges migrent vers les bords. Au delà, $\rho_f \approx 0$ dans les équations (électroneutralité).

2. Propagation des ondes

2.1 Équation de propagation

2.2 Effet de peau et aspect énergétique

2.3 Dispersion dans les plasma

LP 30 : Rayonnement dipolaire électrique

Niveau L2

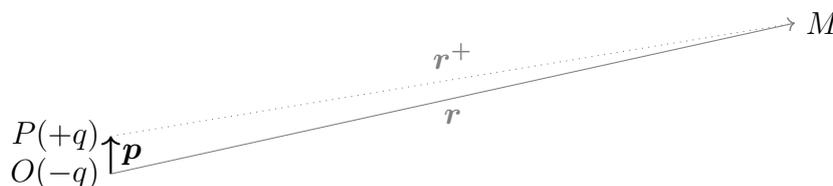
Prérequis Électromagnétisme (\mathbf{E} , \mathbf{B} , V , \mathbf{A}) Vecteur de POYNTING Dipôle électrostatique Électron élastiquement lié

Dans les leçons précédentes, nous avons étudié l'interaction entre la lumière et les milieux : dans une description mésoscopique, nous expliquions comment le champ électromagnétique se voyait modifié en présence de matière. Notre description mettait en jeu des charges dites liées ou libres, qui par leur mouvement, étaient la source d'une réponse aux ondes de la part du matériaux. L'un des phénomènes passé sous silence, est le suivant : une charge en mouvement génère autour d'elle un champ électrique et un champ magnétique, elle doit rayonner.

Dans cette leçon, nous n'étudions pas l'absorption et la dispersion des ondes dans les milieux, mais le rayonnement émis par un milieu soumis à une excitation électromagnétique. Nous travaillerons sur un modèle simple : le dipôle électrique oscillant.

1. Champs \mathbf{E} et \mathbf{B} d'un dipôle électrique oscillant [63, 34]

1.1 Modèle et approximation dipolaire



On considère deux charges $+q$ et $-q$ situées en P et O (avec $\|\overline{OP}\| = d$). Ces charges constituent un dipôle de moment dipolaire $\mathbf{p} = q\overline{OP}$.

On se place dans un système de coordonnées sphérique usuel de sorte que l'axe porté par \mathbf{e}_z soit aligné avec \overline{OP} . D'où : $\mathbf{p} = qd\mathbf{e}_z$.

On étudie la situation en un point M de l'espace décrit par le rayon vecteur \mathbf{r} . On définit le vecteur :

$$\mathbf{r}^+ = \overline{PM}$$

et l'angle :

$$\theta = (\mathbf{p}, \mathbf{r})$$

Dans le cadre de l'*approximation dipolaire* nous allons considérer $d \ll r$, ce qui revient à observer le dipôle depuis une très grande distance. Nous avons, par géométrie :

$$\mathbf{r}^+ = \mathbf{r} - d\mathbf{e}_z \implies r^{+2} = r^2 + d^2 - 2rd \cos(\theta)$$

Alors,

$$r^+ \approx r - d \cos(\theta)$$

1.2 Potentiels

1.2.1 Potentiel vecteur \mathbf{A}

Le potentiel vecteur *retardé*, définit pour une distribution de courants par :

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint \frac{\mathbf{j}(M', t - \frac{M'M}{c})}{r} dV \quad \text{où } \mathbf{j} = \mathbf{v}\rho$$

décrit le potentiel effectivement ressenti au point r à l'instant t , alors qu'il a été créé auparavant par l'ensemble des points de l'espace. Dans le cadre de l'approximation dipolaire, nous aurons :

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r} \iiint \mathbf{j}(M', t - \frac{M'M}{c}) dV$$

Plus précisément dans notre situation, comme nous avons seulement deux charges ponctuelles ($\pm q$) parmi lesquelles une seule ($-q$) est animée d'une vitesse $\dot{\mathbf{d}}$, l'intégrale vaut $q\dot{\mathbf{d}} = \dot{\mathbf{p}}$. Nous aurons finalement :

$$\mathbf{A}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t - \frac{r}{c})}{r}$$

1.2.2 Potentiel scalaire V

La jauge de LORENTZ :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial V}{\partial t}$$

permet de calculer aisément le potentiel scalaire V en effet :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial A_z}{\partial r} = \frac{\mu_0 \cos(\theta)}{4\pi} \left(\frac{-\dot{p}(t - \frac{r}{c})}{r^2} - \frac{\ddot{p}(t - \frac{r}{c})}{rc} \right)$$

d'où :

$$\begin{aligned} V(M, t) &= \frac{\mu_0 \cos(\theta)}{4\pi c^2} \int \left(\frac{\dot{p}(t - \frac{r}{c})}{r^2} + \frac{\ddot{p}(t - \frac{r}{c})}{rc} \right) dt \\ &= \frac{\cos(\theta)}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{p(t - \frac{r}{c})}{r^2} + \frac{\dot{p}(t - \frac{r}{c})}{rc} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{\mathbf{p}(t - \frac{r}{c})}{r^2} + \frac{\dot{\mathbf{p}}(t - \frac{r}{c})}{rc} \right) \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

Dans la situation stationnaire, $\dot{p} = 0$, on retrouve les potentiels électrique et magnétique du dipôle électrique :

$$\mathbf{A}(M, t) = \mathbf{0} \quad \text{et} \quad V(M, t) = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_r}{r^2}$$

Sur l'invariance de jauge Les équations de MAXWELL :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\end{aligned}$$

Permettent de définir V et \mathbf{A} :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 &\implies \exists \mathbf{A} | \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \\ \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &\implies \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = \mathbf{0} \implies \exists -V | -\nabla \cdot \mathbf{V} = \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\end{aligned}$$

de manière non univoque puisque :

$$\begin{aligned}\mathbf{A}' &= \mathbf{A} + \nabla f \implies \nabla \times \mathbf{A}' = \nabla \times \mathbf{A} + \nabla \times \nabla f = \nabla \times \mathbf{A} \\ &\text{laisse } \mathbf{B} \text{ inchangé} \\ \text{puis } \mathbf{E} &= -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{\partial \nabla f}{\partial t} \implies \mathbf{E} = -\nabla \left(V + \frac{\partial f}{\partial t} \right) - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\ &\text{laisse } \mathbf{E} \text{ inchangé sous la condition } V' = V + \frac{\partial f}{\partial t} \\ &\mathbf{E} \text{ et } \mathbf{B} \text{ inchangés} = \text{physique inchangée}\end{aligned}$$

Le choix de f est un choix de jauge ; et comme :

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla^2 f$$

le choix de f peut être fait indirectement en faisant un choix de $\nabla \cdot \mathbf{A}'$: choisir $\nabla \cdot \mathbf{A}'$ c'est choisir une jauge.

On peut écrire d'une part :

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 V - \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

et d'autre part :

$$\begin{aligned}\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) &= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \\ &= \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \left(-\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \\ \implies \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A} &= \mu_0 \mathbf{j} - \nabla \left(\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{A} \right)\end{aligned}$$

On remarque que, si l'on avait f telle que :

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V'}{\partial t} = 0$$

alors ce serait bien puisqu'on aurait :

$$\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V'}{\partial t^2} - \nabla^2 V' = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

$$\text{et } \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}'}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{A}' = \mu_0 \mathbf{j}$$

équation symétriques. On choisit donc la jauge, dite de LORENTZ :

$$\nabla \cdot \mathbf{A}' = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 V'}{\partial t^2}$$

et sous cette les équations symétriques sur \mathbf{A}' et V' précédentes sont vérifiées et conforme à la physique, au même titre que celles sur \mathbf{A} et V .

Ces équations s'écrivent indifféremment des quantités physiques :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - c^2 \nabla^2 \psi = s$$

où s est un terme « de source » ... la suite dans [34, chap. 21.2]

1.3 Champs

1.3.1 Champ magnétique B

Vu la symétrie cylindrique du problème, nous proposons un système de coordonnées $O(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\varphi, \mathbf{e}_z)$ et nous prévoyons que le champ magnétique sera orienté selon \mathbf{e}_φ . Les coordonnées cylindriques et les coordonnées sphériques sont liées en particulier par :

$$\mathbf{e}_\rho = \mathbf{e}_r(1 - \cos \theta) \implies \rho = r \sin \theta$$

Connaissant $\mathbf{B} = \nabla \times A$, nous pouvons écrire :

$$(\nabla \times A) \cdot \mathbf{e}_\varphi = \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho} = -\frac{\partial r}{\partial \rho} \frac{\partial A_z}{\partial r} = \sin(\theta) \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \left(\dot{p} + \frac{r}{c} \ddot{p} \right)$$

et on en tire,

$$\mathbf{B}(M, t) = \frac{\mu_0}{4\pi r^2} \left(\dot{p} + \frac{r}{c} \ddot{p} \right) \mathbf{e}_\varphi$$

1.3.2 Champ électrique \mathbf{E}

Vu la symétrie cylindrique autour de \mathbf{e}_z , nous prévoyons que le champ électrique n'aura pas de composante selon \mathbf{e}_φ . Avec $\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ nous pouvons calculer :

$$\begin{aligned} E_r(M, t) &= -\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial t} \\ &= \frac{\cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-\dot{p}}{r^2 c} + \frac{-2p}{r^3} + \frac{-\ddot{p}}{r c^2} + \frac{-\dot{p}}{r^2 c} \right) - \frac{\mu_0 \ddot{p} \cos(\theta)}{4\pi r} \\ &= \frac{\cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{2p}{r^3} + \frac{2\dot{p}}{r^2 c} \right) \end{aligned}$$

puis,

$$\begin{aligned} E_\theta(M, t) &= -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial t} \\ &= \frac{\sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^3} \left(p + \frac{r}{c} \dot{p} \right) - \frac{\mu_0 \ddot{p} \sin(\theta)}{4\pi r} \\ &= \frac{\sin(\theta)}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{p}{r^3} + \frac{\dot{p}}{r^2 c} + \frac{\ddot{p}}{r c^2} \right) \end{aligned}$$

Remarquons que $\mathbf{E}(M, t)$ et $\mathbf{B}(M, t)$ sont orthogonaux.

1.4 Régime harmonique

Lorsque $a(t) = a_0 \cos(\omega t)$, le passage en représentation complexe des grandeurs périodiques va permettre d'écrire :

$$\underline{p}(t) = p_0 e^{-i\omega t} \quad \underline{p}(t' = t - \frac{r}{c}) = p_0 e^{-i\omega(t - \frac{r}{c})} \quad \underline{\dot{p}} = -i\omega \underline{p} \quad \underline{\ddot{p}} = -\omega^2 \underline{p}$$

ce qui donnera :

$$\begin{aligned} \underline{B}_\varphi(M, t) &= \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0 c^2} \left(\frac{-i\omega}{r^2} - \frac{\omega^2}{r c} \right) \underline{p} \\ \underline{E}_r(M, t) &= \frac{2 \cos \theta}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} + \frac{-i\omega}{r^2 c} \right) \underline{p} \\ \underline{E}_\theta(M, t) &= \frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r^3} - \frac{i\omega}{r^2 c} - \frac{\omega^2}{r c^2} \right) \underline{p} \end{aligned}$$

2. Rayonnement à grande distance

Si l'on se place assez près du dipôle, de sorte que la durée de propagation soit petite devant la période de l'onde émise :

$$\frac{r}{c} \ll \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{c/\lambda} \implies r \ll \lambda$$

mais en vérifiant toujours l'approximation dipolaire donc :

$$d \ll r \ll \lambda$$

les termes en $1/r^3$ seront dominants. Nous nous intéressons au cas contraire.

2.1 Champs à grande distance

À grande distance, $r \gg \lambda$, les termes dominants sont ceux en $1/r$. Nous aurons,

$$\begin{aligned}\underline{B}_\varphi(M, t) &= -\frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{rc^3} \underline{p} \\ \underline{E}_r(M, t) &= 0 \\ \underline{E}_\theta(M, t) &= -\frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{rc^2} \underline{p}\end{aligned}$$

ce qui s'écrit vectoriellement :

$$\begin{aligned}\underline{\mathbf{B}}(M, t) &= -\frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{rc^3} \underline{p}(t') \mathbf{e}_\varphi \\ \underline{\mathbf{E}}(M, t) &= -\frac{\sin \theta}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega^2}{rc^2} \underline{p}(t') \mathbf{e}_\theta\end{aligned}$$

On rappelle : $t' = t - \frac{r}{c}$. Le signe $-$ n'est qu'un terme de phase vis-à-vis de la polarisation \underline{p} . Concernant les amplitudes : $\|\underline{\mathbf{B}}\| = \|\underline{\mathbf{E}}\|/c \mathbf{e}_\varphi$.

Les vecteur champ électrique et champ magnétique sont en phase, ils forment un trièdre direct avec le vecteur \mathbf{e}_r , et leur amplitude décroît en $1/r$ à grande distance du dipôle : localement, nous avons une structure d'onde plane puisque le champ est presque uniforme. Le plan d'onde associé est tangent à la sphère de rayon r et centrée en O .

On peut tracer l'amplitude de l'un des champs en coordonnées polaires,

To-Do Le faire!

2.2 Puissance rayonnée

2.2.1 Vecteur de POYNTING

On définit le vecteur de POYNTING :

$$\mathbf{R} \equiv \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0} = \epsilon_0 c \|\mathbf{E}\|^2 \mathbf{e}_r = \frac{\sin^2(\theta)}{16\pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{\omega^4 p_0^2}{r^2} \cos(\omega t') \mathbf{e}_r$$

homogène à des W m^{-2} , qui indique la direction et le flux d'énergie portée par l'onde électromagnétique. Les détecteurs sont généralement sensibles à sa moyenne temporelle $\langle \mathbf{R}(M) \rangle$:

$$\langle \mathbf{R}(M) \rangle = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \left(\frac{\omega^2 p_0 \sin \theta}{r} \right)^2 \mathbf{e}_r$$

L'énergie est ainsi véhiculée selon l'axe radial \mathbf{e}_r , et son flux décroît en $1/r^2$. Ce dernier est, en particulier, proportionnel à $\sin^2(\theta)$, donc nul le long de l'axe $\mathbf{e}_z \parallel \underline{\mathbf{p}}$ du dipôle. On peut maintenant tracer un diagramme de rayonnement, regroupant ces informations sur un graphe :

To-Do Le faire!

2.2.2 Puissance totale rayonnée

La totalité de la puissance rayonnée traverse chaque surface sphérique de rayon r centrée en O , notée $\mathcal{S}(r)$. On calculera donc \mathcal{P} la puissance moyenne :

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \oint_{\mathcal{S}} \langle \mathbf{R} \rangle \cdot d\mathbf{S} = \frac{\omega^4 p_0^2}{32\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin \theta}{r} \right)^2 r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \frac{\omega^4 p_0^2}{16\pi \epsilon_0 c^3} \int_0^\pi d\theta \sin^3(\theta) \\ &= \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\omega^4 p_0^2}{3c^3}\end{aligned}$$

Le résultat ne dépend, bien sûr, pas de r .

3. Rayonnement dipolaire d'un électron atomique

3.1 Description classique de l'atome

Le modèle choisi du dipôle électrique n'est pas anodin en effet, les atomes constitués de noyaux et d'électrons (plus légers, $m_n/m_e \approx 2000$) vont avoir un comportement proche de celui des dipôles. Dans le modèle de l'électron élastiquement lié, on définit une force de rappel liée à l'interaction coulombienne entre le noyau et l'électron considéré, on montre que l'électron oscille autour d'une position d'équilibre à une pulsation ω_0 .

Dans ce modèle, nous sommes donc contraint de considérer le rayonnement émis par l'électron. La puissance moyenne rayonnée est :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{4\pi \epsilon_0} \frac{\omega_0^4 (-ex_0)^2}{3c^3}$$

avec $-e$ la charge de l'électron et x_0 l'élongation de l'oscillateur. On remarquera que pour l'oscillateur harmonique, l'accélération moyenne s'écrit $a = \langle \ddot{x}_0 \rangle = -\omega_0^2 x_0/2$ donc $\omega_0^4 x_0^2 \propto a^2$ d'où $\mathcal{P} \propto a^2$. Ce résultat se généralise au mouvement quelconques de charges accélérées, établi par LARMOR en 1897, il explique le rayonnement émis par les particules dans les synchrotrons.

L'énergie émise résulte d'une transformation de l'énergie mécanique :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m_e (\omega_0 x_0)^2 = \frac{12\pi \epsilon_0 c^3}{\omega_0^2} \mathcal{P}$$

qui diminue selon :

$$-d\mathcal{E}_m = \mathcal{P} dt = \frac{\omega_0^2}{12\pi \epsilon_0 c^3} \mathcal{E}_m dt \equiv \frac{1}{\tau} \mathcal{E}_m dt \implies -\frac{d\mathcal{E}_m}{\mathcal{E}_m} = \frac{dt}{\tau} \implies \mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_m(0) e^{-t/\tau}$$

Le phénomène d'amortissement mécanique est souvent modélisé par une force de frottement fluide ($\propto \dot{x}_0$), dont les conséquences sur le mouvement seraient identiques. On ne peut toutefois pas conclure sur l'émission de l'atome sans valeur de x_0 .

3.2 Diffusion du rayonnement par un atome

On considère encore un électron élastiquement lié et amorti dont l'équation du mouvement en régime libre s'écrit :

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

lorsque l'électron est soumis à un champ électrique \mathbf{E} de pulsation ω et d'amplitude E_0 , l'équation devient :

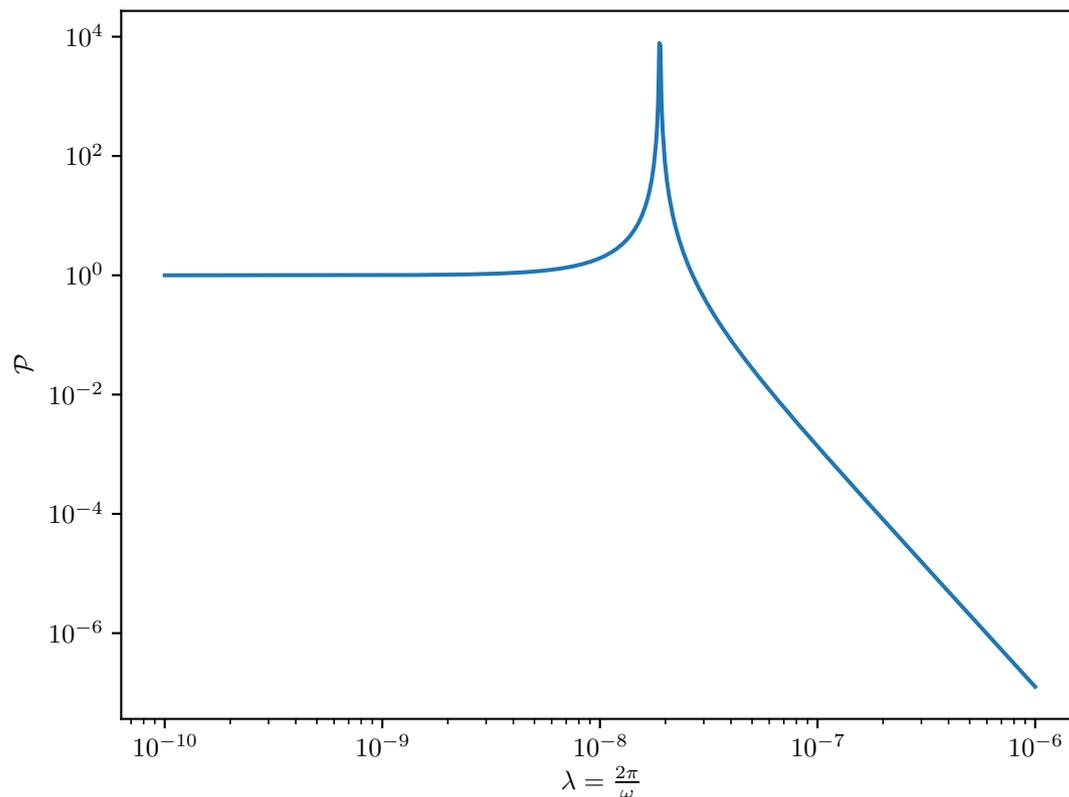
$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0^2 x = -e \frac{E_0}{m_e} e^{-i\omega t}$$

on reconnaît l'oscillateur harmonique amorti en régime forcé pour lequel le mouvement est décrit par :

$$x = \frac{-eE_0/m_e}{(\omega_0^2 - \omega^2) - i\omega/\tau} e^{-i\omega t}$$

On comprend là que nous pourrions déterminer par une expérience de résonance, les valeurs de ω_0 , τ , et donc x_0 . En effet, la puissance moyenne rayonnée par ce dipôle s'écrit :

$$\mathcal{P} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\omega_0^4 (-e|x|)^2}{3c^3} \propto \frac{\omega^4}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\frac{\omega}{\tau})^2}$$



On distingue trois domaines :

- $\omega \ll \omega_0$ où $\mathcal{P} \propto \omega^4 \propto \frac{1}{\lambda^4}$, domaine de la diffusion de RAYLEIGH,

- $\omega \gg \omega_0$ où $\mathcal{P} \approx \text{cste}$, domaine de la diffusion de COMPTON,
- et le domaine intermédiaire, de diffusion résonante.

Les pulsations de lumière visible dans l'atmosphère se situent dans le domaine de diffusion de RAYLEIGH ($\omega_0 \approx 1 \times 10^{17} \text{ rad s}^{-1}$ [63]), les couleurs de *courte* longueurs d'onde sont donc *moins* diffusées que celles de longue longueur d'onde.

LP 31 : Présentation de l'optique géométrique à l'aide du principe de FERMAT

Niveau L1

Prérequis Lois de SNELL-DESCARTES (2nde)

Le 25 mars 2019 à 19h12 une photo du coucher de Soleil a été prise à Berck-Plage.

MÉDIA | <https://www.infoclimat.fr/photolive-photos-meteo-241327-coucher-de-soleil.html#photo6>

Le logiciel de planétarium **Stellarium** permet de simuler cette situation en précisant les coordonnées GPS et l'heure.

MÉDIA | `./documents/coucher_sol_stellarium_noatmo.png`

Il y a un problème : d'après le logiciel et donc, d'après l'équation horaire pourtant très précises de la trajectoire du Soleil, ce dernier se trouvait à la position et à l'heure indiquée sous l'horizon. Nous ne voulons pas incriminer le photographe, et nous allons chercher une explication à ce phénomène.

L'optique géométrique du lycée nous apprend que la lumière se propage en ligne droite dans les milieux homogène, et les lois de SNELL-DESCARTES pour la réflexion et la réfraction permettent de calculer l'angle de déviation des rayons lumineux au passage d'un dioptre, un dioptre étant la surface qui sépare deux milieux d'indices de réfraction différents. L'atmosphère est un milieu inhomogène que l'on peut modéliser comme une infinité de dioptres : cela va expliquer le problème que nous étudions, mais il sera difficile d'appliquer les lois de SNELL-DESCARTES.

MANIP' | Envoyer le rayon d'un laser dans une longue cuve d'eau (≈ 40 cm) saturée en sucre et ayant reposée de sorte à créer un gradient d'indice.

Dans cette leçon nous allons découvrir un principe physique qui sert aujourd'hui de fondement à l'optique géométrique. Le principe de FERMAT, postulé en 1657 permet d'unifier les lois expérimentales de SNELL-DESCARTES (984 puis 1621) sous une seule expression mathématique, et permet d'étudier des phénomènes plus compliqués.

On se place dans un cadre d'optique géométrique sans phénomènes de diffraction ou d'interférences. On se place aussi dans le cadre d'indices de réfraction réels : pas d'atténuation, pas d'anisotropie.

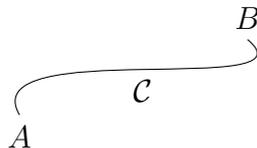
1. Le principe de FERMAT

1.1 Chemin optique

Pour la lumière qui se déplace en ligne droite sur une distance l dans un milieu d'indice n , on appelle chemin optique la grandeur $\mathcal{L} = nl$. On généralise cette définition à une trajectoire courbe \mathcal{C} de A à B , paramétrée par un déplacement élémentaire ds dans des

milieu d'indices variables $n(P)$ par l'intégrale curviligne :

$$\mathcal{L} = \int_{\mathcal{C}} n(P) ds$$



On rappelle que l'indice optique donne le rapport entre la célérité de la lumière dans le vide et la célérité dans le milieu de sorte que : $v = c/n = ds/dt$ avec $c \equiv 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$. Ainsi, le chemin optique s'exprime :

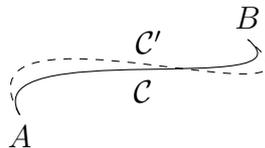
$$\mathcal{L} = \int_{\mathcal{C}} n(P) \frac{c}{n(P)} dt = c \int_{\mathcal{C}} dt = c\Delta t$$

on comprend que le chemin optique correspond à la distance qu'aurait dû parcourir la lumière si elle était dans le vide pour que la durée du parcours soit la même que celle du parcours effectivement suivi dans la matière.

1.2 Énoncé du principe

« La lumière se propage d'un point à un autre sur des trajectoires telles que le chemin optique soit extrêmeal. »

Précisions le terme *extrêmeal*. On considère le chemin \mathcal{C} entre A et B et le chemin \mathcal{C}' qui est une variation infinitésimale de \mathcal{C} , mais avec A et B inchangés.



Le chemin optique \mathcal{L} et le chemin optique \mathcal{L}' sont différents, mais cette différence est nulle au premier ordre si \mathcal{C} est le chemin effectivement suivi par la lumière.

2. Conséquences et applications : retrouvons l'optique géométrique

2.1 Propagation en ligne droite dans les milieux homogènes

On considère un milieu d'indice n , le chemin optique entre deux points A et B est :

$$\mathcal{L} = \int_{\mathcal{C}} n ds = n \int_{\mathcal{C}} ds$$

il s'agit donc d'extrémaliser la distance géométrique entre A et B , ce qui s'obtient avec la ligne droite (la distance est minimale, mais n'as pas de borne supérieure et n'est donc jamais maximale).

2.2 Principe du retour inverse de la lumière

On considère un chemin \mathcal{C} de A à B effectivement suivi par la lumière, de sorte que $\mathcal{L} = \int_{\mathcal{C}} n ds$ soit extrêmé. Le calcul de $\mathcal{L}' = \int_{\mathcal{C}} n ds'$ en parcourant \mathcal{C} dans le sens inverse (de B à A) va nécessairement donner $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$ donc ce dernier est lui aussi extrêmé.

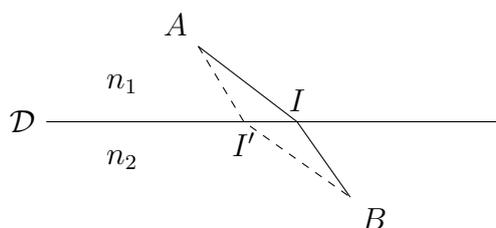
2.3 Lois de SNELL-DESCARTES

2.3.1 Préambule

On considère deux points A et B . La distance géométrique $AB = \overline{AB} \cdot \vec{u}$ peut se différencier pour donner :

$$\begin{aligned} dAB &= d\overline{AB} \cdot \vec{u} + \overline{AB} \cdot d\vec{u} \\ &= (d\vec{B} - d\vec{A}) \cdot \vec{u} + \vec{0} \end{aligned}$$

On considère maintenant deux milieux 1 et 2 d'indices n_1 et n_2 séparés par un dioptre \mathcal{D} . Dans 1 se trouve le point A et dans 2 se trouve le point B . On cherche le point I par laquelle passe la lumière qui va de A à B .



Le chemin optique entre A et B et sa différentielle s'écrivent :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= n_1 AI + n_2 IB \\ d\mathcal{L} &= n_1(d\vec{I} - d\vec{A}) \cdot \vec{u}_1 + n_2(d\vec{B} - d\vec{I}) \cdot \vec{u}_2 = d\vec{I}(n_1\vec{u}_1 - n_2\vec{u}_2) \end{aligned}$$

la dernière égalité découlant du fait que l'on s'intéresse à des points A et B fixés. Ainsi, le chemin effectivement suivi étant celui qui extrêmé \mathcal{L} , on écrit :

$$d\mathcal{L} = d\vec{I}(n_1\vec{u}_1 - n_2\vec{u}_2) = 0 \implies (n_1\vec{u}_1 - n_2\vec{u}_2) \perp d\vec{I} \in \mathcal{D}$$

on trouve que la quantité vectorielle $n_1\vec{u}_1 - n_2\vec{u}_2$ doit être perpendiculaire au dioptre. On notera $(n_1\vec{u}_1 - n_2\vec{u}_2) \parallel \vec{N}$ la normale au dioptre.

2.3.2 Réflexion

Dans le cas de la réflexion, $n_2 = n_1 = n$ alors :

$$\begin{aligned} n\vec{u}_1 - n\vec{u}_2 &= a\vec{N} \implies \vec{u}_2 = -\frac{a}{n}\vec{N} + \vec{u}_1 \\ &\implies \vec{N} \times \vec{u}_2 = \vec{N} \times \left(-\frac{a}{n}\vec{N} + \vec{u}_1\right) \\ &\implies \sin(\vec{N}, \vec{u}_2) = \sin(\vec{N}, \vec{u}_1) \\ &\implies i_2 = -i_1 \end{aligned}$$

2.3.3 Réfraction

NOTES Même principe.

3. Conséquences et applications : retour au coucher de Soleil [65]

3.1 L'équation du rayon lumineux

Dans un milieu d'indice variable (suivant l'altitude y), le chemin optique s'écrit :

$$\mathcal{L} = \int_{\mathcal{C}} n(y) ds$$

avec :

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx \sqrt{1 + y'^2}$$

d'où :

$$\mathcal{L} = \int_{\mathcal{C}} n(y) \sqrt{1 + y'^2} dx = \int_{\mathcal{C}} f(x, y(x), y'(x)) dx$$

Pour résoudre le problème d'extrémalisation, on peut utiliser l'équation d'EULER-LAGRANGE qui y est équivalente.

NOTES

On considère un chemin $\mathcal{C} = y(x)$ et une variation infinitésimale $\mathcal{C}' = y(x) + \epsilon g(x)$ qu'on associe aux chemis optiques \mathcal{L} et $\mathcal{L}'[y] = \mathcal{L}[y + \epsilon g]$ de sorte que :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[n + \epsilon] &= \int_A^B f[y + \epsilon g, y' + \epsilon g'] dx \\ &= \int_A^B \left(f[y, y'] + \frac{\partial f}{\partial y} \epsilon g(x) + \frac{\partial f}{\partial y'} \epsilon g'(x) \right) dx \\ &= f[y, y'] + \epsilon \int_A^B \frac{\partial f}{\partial y} g(x) dx + \epsilon \int_A^B \frac{\partial f}{\partial y'} g'(x) dx \end{aligned}$$

À l'aide de l'intégration par partie :

$$\int_A^B \frac{\partial f}{\partial y'} g'(x) dx = \left[\frac{\partial f}{\partial y'} g(x) \right]_A^B - \int_A^B \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) g(x) dx$$

où le premier terme est nul car $g(x_A) = 0 = g(x_B)$, on obtient :

$$\mathcal{L}[n + \epsilon] = f[y, y'] + \epsilon \int_A^B \frac{\partial f}{\partial y} g(x) dx - \int_A^B \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) g(x) dx$$

donc :

$$d\mathcal{L} = \epsilon \int_A^B \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \right) g(x) dx$$

Pour les solutions $f[y]$ extrémales, $d\mathcal{L} = 0$ pour $g(x)$ arbitraire donc :

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) = 0$$

c'est l'équation d'EULER-LAGRANGE.

Adapté au problème, elle donne :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y'} \right) \\ \implies \frac{\partial n}{\partial y} \sqrt{1+y'^2} &= \frac{d}{dx} \left(\frac{ny'}{\sqrt{1+y'^2}} \right) \\ \implies \frac{\partial n}{\partial y} \sqrt{1+y'^2} &= \frac{d}{ds} (ny') \\ \implies \frac{\partial n}{\partial y} \sqrt{1+y'^2} &= \frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{dx} \right) \\ \implies \frac{\partial n}{\partial y} &= \frac{d}{ds} \left(n \frac{dy}{ds} \right) \end{aligned}$$

et de la même manière (en reprenant le calcul avec $x(y)$) :

$$\frac{\partial n}{\partial x} = \frac{d}{ds} \left(n \frac{dx}{ds} \right)$$

finalemt (à 3D) :

$$\nabla(n) = \frac{d}{ds} \left(n \left[\frac{dx}{ds} \vec{u}_x + \frac{dy}{ds} \vec{u}_y + \frac{dz}{ds} \vec{u}_z \right] \right) = \frac{d}{ds} (n\vec{u})$$

3.2 Rayon de courbure du rayon lumineux

On retrouve de suite que dans un milieu homogène les rayons se propagent en ligne droite : $n = \text{cste} \implies \nabla(n) = 0 \implies n\vec{u} = \text{cst}$.

Pour un milieu non homogène, on peut développer :

$$\nabla(n) = \frac{d}{ds} (n\vec{u}) = n \frac{d\vec{u}}{ds} + \vec{u} \frac{dn}{ds}$$

Le second terme qui est colinéaire à \vec{u} correspond à la propagation dans le sens du rayon, alors que le premier terme colinéaire à $d\vec{u}$ correspond à la déviation dans la direction perpendiculaire. On définit le rayon de courbure comme :

$$\frac{1}{R} \equiv \frac{d\vec{u}}{ds} \cdot \vec{u}_\perp$$

donc en projetant :

$$\nabla(n) \cdot \vec{u}_\perp = \frac{n}{R} \implies \frac{1}{R} = \frac{\nabla(n) \cdot \vec{u}_\perp}{n}$$

On trouve que le rayon est toujours courbé vers les régions de fort indice, donc dans le sens du gradient ; il est d'autant plus courbé que le gradient d'indice est grand.

Remarque sur les fibres optiques Dans les fibres optiques le cœur à toujours un indice plus grand. Pour les fibres à saut d'indice le gradient est infini (discontinuité) d'où le « rebond » (rayon de courbure nul).

3.3 Indice optique dans l'atmosphère

To-Do Trouver une description pour l'atmosphère : on trouvera que le gradient d'indice est dirigé vers le sol pour expliquer le phénomène au coucher de Soleil.

Le calcul explique également la courbure des rayons dans la manip. Ainsi que les mirages sur la route en été où cette fois le gradient d'indice est dirigé vers le ciel.

LP 32 : Microscopies optiques

- MANIP'** Pendant toute la leçon, avoir un microscope de labo posé sur la table. Il servira à montrer les différents éléments et à avoir une idée de valeurs pour les ordres de grandeurs.
- MANIP'** Préparer la modélisation du microscope sur un banc optique, avec un œil facile à enlever.
- MÉDIA** Les illustrations de cette leçon ont été regroupées dans le document :
./documents/LP32.pdf

1. Étude géométrique

1.1 Limites de l'œil humain

On modélise l'œil emmétrope comme une lentille mince de distance focale variable (cornée et cristallin), un diaphragme (iris), et un écran (rétine). La distance entre la lentille et l'écran est fixe.

L'œil émmétrope peut voir nettement des objets situés entre le punctum remotum (à l'infini) et le punctum proximum (à $d_{pp} \approx 25$ cm), grâce à la faculté d'accommodation du cristallin (changement de distance focale).

Le détail le plus petit observable au punctum proximum a une taille de l'ordre du dixième de millimètre. La grandeur plus appropriée pour exprimer la taille des objets que l'on observe est leur *diamètre angulaire*, on peut distinguer des détails dès lors que leur diamètre angulaire est supérieur à $0^\circ 1'$.

NOTES Cette limite correspond à la fois à la taille caractéristique des battonnets sur la rétine et la taille de la tâche d'AIRY formée sur la rétine lors de la diffraction par l'iris. La nature fait bien les choses.

Pour ordre de grandeur :

Objet	Diamètre	Distance	Diamètre angulaire
Orange	8 cm	25 cm	$18^\circ 1'$
Orange	8 cm	8,6 m	$32'$
Soleil	$1,4 \times 10^6$ km	150×10^6 km	$32'$
Lune	$3,4 \times 10^3$ km	380×10^3 km	$31'$
Cheveu	0,09 mm	25 cm	$1,2'$
Cellule	20 μ m	25 cm	$0,3'$
Gravure IBM	10 nm	25 cm	0,000 14'

Avec une loupe, on peut améliorer les choses d'un facteur 10 environ. Un microscope offre de meilleurs performances, nous allons le voir.

1.2 Modélisation du microscope [7]

Sur le microscope posé sur la paillasse, on observe la présence de différents éléments, certains sont réglable d'autres non. Le schéma [7, Figure 1] présente ces éléments. L'oculaire et l'objectif sont les éléments optiques qui nous intéressent le plus ici, nous allons les modéliser chacun par une lentille mince convergente.

NOTES En réalité, ils sont constitués de plusieurs lentilles qui servent à corriger les différentes aberrations introduites.

L'objectif L_1 est situé près de l'objet AB étudié et en forme une image A_1B_1 .

On désire pour pouvoir utiliser le microscope sans que l'œil ne doive accommoder. En conséquence, l'oculaire L_2 qui est situé près de l'œil et forme une image de A_1B_1 , doit être disposé de sorte que son point focal objet F_2 et le point A_1 soient confondus, pour que l'image de l'objet se trouve à l'infini.

La distance $\Delta = F_1'F_2 = 16$ cm est fixée par la construction du microscope (c'est la longueur du tube). Les objectifs et les oculaires peuvent être changés mais sont fixés au bâti de l'appareil par leurs extrémités F_1' et F_2 .

Pour que l'image A_1 de A se trouve au point F_2 (observation sans accommoder) l'objet doit se trouver dans une position particulière : c'est à cela que servent la vis de réglage de la plateforme que l'on ajuste pendant le processus de mise au point.

MANIP' Le montrer sur le banc optique.

NOTES Pour que $F_1'A_1 = \Delta$ il faut : $F_1A = f_1'^2/\Delta$.

1.3 Caractéristiques du microscope [7]

1.3.1 Grossissement commercial de l'oculaire : G_{oc}

Le grossissement commercial de l'oculaire correspond au rapport α'/α des angles sous lequel apparaît un objet A_1B_1 lorsqu'observé :

- à travers l'oculaire, placé au foyer objet (α')
- à l'œil nu, placé au punctum proximum (α)

On peut exprimer :

$$\alpha' = \frac{A_1B_1}{f_2'} \quad \text{et} \quad \alpha = \frac{A_1B_1}{d_{pp}} \implies G_{oc} = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{d_{pp}}{f_2'}$$

Pour un oculaire de grandissement commercial $\times 10$, la distance focale f_2' de la lentille mince correspondante est $f_2' = 2,5$ cm.

1.3.2 Grandissement de l'objectif : γ_{obj}

Le grandissement de l'objectif correspond au rapport A_1B_1/AB des tailles :

- de l'image de l'objet, formée par l'objectif, à la distance Δ de F_1' (A_1B_1)
- de l'objet (AB)

On peut exprimer :

$$\gamma_{obj} = \frac{\Delta}{f'_1}$$

Pour un objectif de grandissement $\times 20$, la distance focale f'_1 de la lentille mince correspondante est $f'_1 = 8 \text{ mm}$.

1.3.3 Grossissement commercial du microscope : G

Le grossissement commercial du microscope correspond au rapport α'/β des angles sous lequel apparaît l'objet lorsqu'observé :

- à travers le microscope (α')
- à l'œil nu, placé au punctum proximum (β)

On peut exprimer :

$$G = \frac{\alpha'}{\beta} = \gamma_{obj} \cdot G_{oc}$$

Avec les valeurs numériques précédentes on trouve $G = 200$.

Le grossissement du microscope mesure aussi le rapport entre la dimension de l'image sur la rétine lors de l'observation à travers le microscope et lors de l'observation à l'œil nu.

1.3.4 Puissance du microscope : P

La puissance du microscope est le rapport entre l'angle sous lequel on voit l'objet à travers le microscope et la taille de l'objet :

$$P = \frac{\alpha'}{AB} = \frac{\Delta}{f'_1 f'_2}$$

1.3.5 Profondeur de champ

On a vu que l'objet AB pouvait être placé de sorte que son image à travers le microscope soit renvoyée à l'infini. L'objet étant placé de cette manière l'utilisation du microscope peut être faite sans que l'œil ne doive accommoder. Cependant, dans une situation où l'échantillon étudié n'est pas plan alors il n'est pas possible de placer tous les points de sa surface à la bonne position. Dans ce cas, certains points de l'objet verront leur image être envoyée à distance finie de l'œil. Si l'image est envoyée à plus de $d_{pp} = 25 \text{ cm}$ de l'observateur, alors il pourra observer toujours sans accommoder.

On appelle profondeur de champ la distance sur l'axe optique entre les deux positions extrêmes de A , compatibles avec une vision sans accommodation.

1.3.6 Diaphragmes

Le modèle des lentilles minces fait l'hypothèse de lentilles infinies mais en réalité les éléments optiques sont de diamètres finis. Pour tenir compte de cet effet dans notre modèle on peut ajouter deux diaphragmes.

Le diaphragme d'ouverture modélise le diamètre fini du tube de l'objectif. Plus ce diaphragme est grand, plus l'image est lumineuse sur l'écran.

Le diaphragme de champ modélise le diamètre fini du tube de l'oculaire. Plus ce diaphragme est grand plus le champ visuel est large.

NOTES

En pratique on préfère toujours un champ visuel le plus large possible, le diaphragme de champ permet toutefois de ne sélectionner que la partie de l'image qui n'a pas subi trop d'aberrations et qui n'est pas hors de la profondeur de champ, pour que l'observation reste agréable. Dans tous les cas, le champ visuel est limité par l'œil.

MANIP'

Illustrer l'effet des diaphragmes sur le banc optique.

2. Étude ondulatoire

La tâche d'IRY est limitante.

3. Améliorations

3.1 Microscopie confocale

3.2 PALM

LP 33 : Interférences à deux ondes en optique

Niveau L2

Prérequis Optique géométrique Diffraction (lycée) Interférences (lycée) Ondes électromagnétiques

L'optique géométrique est un très bon outil pour étudier la propagation de rayons lumineux, elle permet d'expliquer les phénomènes observés lorsque la lumière traverse des dioptres, et la formation d'images. Cependant, elle ne permet pas d'expliquer tous les phénomènes.

En classe de terminale on découvre les phénomènes d'interférences : l'addition de deux ondes lumineuses ne donne pas nécessairement plus de luminosité ; on apprend que pour pouvoir observer des interférences les sources doivent avoir même longueur d'onde.

MANIP' Montrer la superposition de lumière avec de la lumière blanche restreinte à une fente et filtrée :

- pour deux lampes et des filtres différents,
- pour deux lampes et les mêmes filtres,
- pour des fentes de YOUNG.

Cette expérience annonce les connaissances de terminale incomplètes. Dans cette leçon, nous utiliserons l'électromagnétisme comme modèle ondulatoire de la lumière pour mieux comprendre pourquoi ce que l'on apprend au lycée est vrai, et pourquoi ça n'est pas suffisant.

NOTES Il sera nécessaire d'avoir en tête des dispositifs à division du front d'onde et à division d'amplitude moins scolaires que les fentes de YOUNG ou l'interféromètre de MICHELSON et le FABRY-PERROT.

1. Quelques mots sur les détecteurs en optique

Avant toute chose, nous devons savoir ce que l'on mesure réellement lors d'expériences en optique : ce que l'on perçoit, l'intensité lumineuse, comment est elle liée aux quantités de l'électromagnétisme ?

Les photorécepteurs mesurent une quantité d'énergie, or l'énergie transportée par les ondes électromagnétique est liée au vecteur de POYNTING. Pour des ondes monochromatiques, la norme de ce vecteur est proportionnelle à la norme du champ électrique au carré : $\|\mathbf{E}\|^2$.

Les ondes lumineuses oscillent à des fréquences de l'ordre de 10^{15} Hz, donc des périodes de l'ordre de 10^{-15} s. Les capteurs eux, ont des temps de réponses bien plus long que la période des phénomènes qu'ils mesurent :

Capteur	Temps de réponse (s)
Œil	10^{-1}
Photorésistance	10^{-3}
Phototransistor	10^{-6}
Photodiode	10^{-9}

Il résulte de tout cela, que la quantité $I(M, t)$ mesurée par le capteur en M à t sera proportionnelle à l'énergie reçue pendant un certain temps dit *temps d'intégration*. On écrira :

$$I(M, t) \propto \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t \mathbf{E}^2(M, t') dt'$$

Pour les temps de réponses indiqués, l'intégrale se rapproche de la valeur moyenne de sorte que l'on écrira :

$$I(M, t) \approx \langle \mathbf{E}^2(M, t) \rangle = I(M)$$

NOTES On pourra se préparer à dire des choses sur l'expérience de WINER.

2. Superposition de deux ondes monochromatiques émises par des sources ponctuelles

2.1 Terme d'interférences

On considère deux sources ponctuelles S_1 et S_2 qui émettent des ondes lumineuses monochromatiques de pulsations ω_1 et ω_2 , (nombres d'ondes k_1 et k_2). Nous observons ces sources au point M , dans une région de l'espace où nous pouvons considérer les ondes reçues comme planes. On peut alors donner une expression pour le champ électrique et l'intensité lumineuse mesurée en M , en discriminant les sources :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_i(M, t) &= \mathbf{E}_{0i} \cos(\omega_i t - \varphi_i(M)) \\ \varphi_i(M) &= k_i(S_i M) + \varphi_i \\ I_i(M) &= \langle \mathbf{E}_{0i}^2 \cos^2(\omega_i t - \varphi_i(M)) \rangle = \frac{\mathbf{E}_{0i}^2}{2} = I_i \end{aligned}$$

Par addition, on obtient le champ électrique résultant :

$$\mathbf{E}(M, t) = \mathbf{E}_{01} \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) + \mathbf{E}_{02} \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M))$$

La quantité mesurée ou perçue est :

$$I(M) = I_1 + I_2 + 2\mathbf{E}_{01}\mathbf{E}_{02}\langle \cos(\omega_1 t - \varphi_1(M)) \cos(\omega_2 t - \varphi_2(M)) \rangle$$

On constate que l'intensité lumineuse en M n'est pas égale à la somme des intensités individuelles de chaque source; le terme supplémentaire est celui qui donne naissance aux interférences. Selon les propriétés des ondes émises par chaque source il sera plus ou moins important.

2.2 Conditions d'interférences

2.2.1 Polarisation

Si les sources émettent des ondes électromagnétiques de sorte que $\mathbf{E}_1 \perp \mathbf{E}_2$ alors, le produit scalaire est nul, le terme d'interférences disparaît.

Dans la suite, nous ne considérerons que des sources de même polarisation.

2.2.2 Pulsation

Sources de pulsations différentes $\omega_1 \neq \omega_2$, alors la valeur moyenne du produit de cosinus va être nulle :

$$I(M) = I_1 + I_2$$

Dans cette situation, on remarque que l'on a additionné les valeurs qui auraient été mesurées individuellement pour chaque source. C'est bien ce que l'on a observé dans l'expérience d'introduction.

Sources de même pulsations $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, ($k_1 = k_2 = k$) :

$$\begin{aligned} I(M) &= I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(2\omega t - (\varphi_1(M) + \varphi_2(M))) + \cos(\varphi_1(M) - \varphi_2(M)) \rangle \\ &= I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(\varphi_1(M) - \varphi_2(M)) \rangle \end{aligned}$$

Ici le terme d'interférence n'est pas nul, on voit qu'il dépend du retard existant entre la phase des ondes quand elles arrivent en M , ce *déphasage* est lié à la *différence de marche* δ :

$$\Delta\varphi(M) \equiv \varphi_1(M) - \varphi_2(M) = k \underbrace{((S_1 M) - (S_2 M))}_{\delta(M)} + \underbrace{\varphi_1 - \varphi_2}_{\Delta\varphi}$$

C'est ce terme qui donne lieu aux interférences. Jusque là, les connaissances du lycée sont bien valides mais rappelons que, dans l'expérience d'introduction nous n'observons pas toujours les interférences.

Dans la suite, nous n'étudierons que des sources de même pulsations.

Retour sur l'expérience

MANIP' Ajouter des polariseurs.

Concernant notre expérience, on pourrait penser que nos sources n'avaient pas la même polarisation mais, l'ajout de polariseurs ne change pas le résultat. Il y a donc quelque chose d'autre...

2.2.3 Cohérence temporelle

Regardons à nouveau le terme d'interférences :

$$I(M) = I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(k\delta(M) + \Delta\varphi) \rangle$$

quand nous n'observons pas d'interférences, c'est que ce terme est nul. En un point M de l'écran, $k\delta(M)$ est constant ; mais que peut-on dire de $\Delta\varphi$? Il s'agit du déphasage entre les ondes au moment de leur émission par leur source.

L'émission de lumière est un processus discret et aléatoire :

- dans le modèle corpusculaire, la désexcitation d'un atome entraîne l'émission d'un photon,
- dans le modèle ondulatoire, la désexcitation d'un atome entraîne l'émission d'un *train d'onde* : il s'agit d'un signal sinusoïdal de fréquence ω mais restreint dans le temps.

Dans le cas de plusieurs sources primaires Le déphasage entre deux sources indépendantes est aléatoire à chaque instant, on parle de sources non cohérentes. L'argument du cosinus dans le terme d'interférences prend donc des valeurs aléatoires à chaque instant : la valeur moyenne du cosinus est donc nulle.

Cela explique notre expérience. Dans le cas des deux sources indépendantes, on ne peut pas observer d'interférences. Alors que dans le cas des fentes de YOUNG, l'onde qui arrive à chaque moment sur les deux fentes est issue du même train d'onde d'émission, les ondes émises par ces sources secondaires sont donc cohérentes.

Dans le cas d'une seule source primaire Considérons deux trains d'ondes qui arrivent en M à un instant donné, suivant deux chemins optiques différents.

- Si l'extension spatiale de ces trains d'ondes est supérieure à la différence de marche, alors ces trains d'ondes ont été émis au même moment par la source avec la même phase $\varphi_1 = \varphi_2 \implies \Delta\varphi = 0$. On observe donc des interférences.
- Au contraire, si l'extension spatiale de ces trains d'ondes est inférieure à la différence de marche, alors c'est que ces trains d'ondes ont été émis à des instants différents par la source : ils ont alors chacun une phase φ_i aléatoire. Pour ces deux trains d'ondes particuliers le déphasage $\delta\Phi$ prend une valeur bien spécifique (mais aléatoire), qui donne lieu à des interférences. En conséquence, pour l'ensemble des paires de trains d'ondes reçues pendant la période d'intégration du capteur, le très grand nombre de $\Delta\varphi$ aléatoires va donner lieu à un brouillage des interférences.

Py-Do Faire une animation des trains d'ondes.

To-Do La discussion sur le cas de plusieurs sources primaires à-t-elle sa place ici ?

Les interférences lumineuses ne sont donc pas exactement faciles à obtenir. Pour les faire apparaître et les exploiter, nous avons besoin de solutions techniques particulières que l'on appelle interféromètres. Nous allons étudier un peu plus en détails les fentes de YOUNG et la figure d'interférences qu'elles permettent d'obtenir.

3. Un interféromètre : les fentes de YOUNG

Il s'agit donc d'une solution technique qui permet d'aisément faire apparaître une figure d'interférences. Le système nous place dans des conditions « idéales » où :

$$\begin{aligned} I(M) &= I_1 + I_2 + \sqrt{I_1 I_2} \langle \cos(k\delta(M) + \Delta\varphi) \rangle \\ &= 2I_0 + 2I_0 \cos(k\delta(M)) \\ &= 2I_0(1 + \cos(k\delta(M))) \end{aligned}$$

les sources secondaires sont cohérentes et ont la même intensité.

3.1 Figure d'interférence

3.1.1 Allure

La valeur de $\delta(M)$ se trouve facilement sur le schéma suivant :

To-Do Faire le schéma.

La trigonométrie donne :

$$\delta(M) \approx \frac{ax(M)}{D}$$

To-Do Tracer l'allure.

3.1.2 Interfrange

On appelle interfrange l'espace qui sépare deux maxima (ou minima) d'intensité lumineuse. Les maxima sont obtenus pour les différences de marche particulières δ_p :

$$k\delta_p = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{ax_p}{D} = 2p\pi, p \in \mathbb{N} \implies x_p = p \frac{\lambda D}{a}$$

La différence $x_{p+1} - x_p$ donne l'interfrange $i = \frac{\lambda D}{a}$.

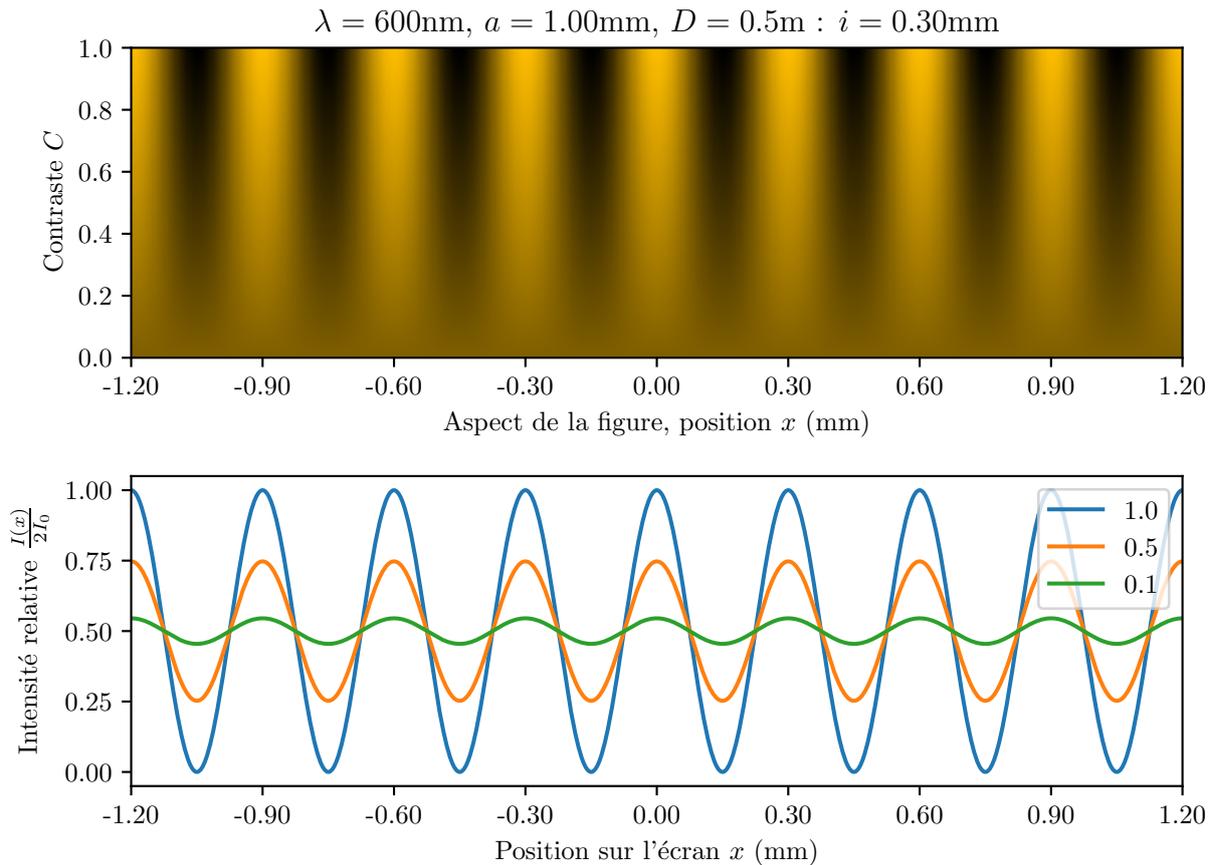
3.1.3 Contraste

Le contraste (ou la visibilité) est une grandeur sans dimension qui donne une indication sur la différence d'intensité lumineuse entre les maxima et les minima. On définit :

$$C = \frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}$$

Pour les fentes de YOUNG le contraste vaut 1. En retournant momentanément au cas le plus général de deux sources monochromatique indépendantes, le contraste s'exprime :

$$C = 2 \frac{E_{01} E_{02}}{I_1 + I_2}$$



3.2 Une nouvelle mise en défaut : cohérence spatiale

MANIP'

To-Do Faire le calcul pour une fente réelle qui éclaire les fentes de YOUNG. Parler de brouillage.

Pour aller plus loin

Dans cette leçon, nous avons complété les connaissances acquises au lycée concernant les conditions d'obtentions de figures d'interférences.

La dernière section mettait en évidence le problème de cohérence spatiale associé aux sources étendues. L'utilisation des fentes de YOUNG restreint l'expérimentateur à des sources fines et par conséquent peu lumineuses, il résulte bien sûr que la figure d'interférence, même si elle présente un bon contraste, sera peu brillante.

Dans la prochaine leçon nous étudierons de manière plus formelle la cohérence spatiale pour chercher à réaliser un interféromètre qui permet l'utilisation de sources étendues.

LP 34 : Interférométrie à division d'amplitude

Dans la leçon précédente, nous avons étudié les conditions d'obtention d'interférences. En particulier, nous avons vu que les problèmes de cohérence spatiale posaient problème vis-à-vis de la luminosité des franges, dans les expériences de division du front d'onde (fentes de YOUNG entre autres).

Dans cette leçon nous présentons une solution alternative à la division du front d'onde dite division d'amplitude : l'idée est de faire interférer chaque rayon avec lui-même.

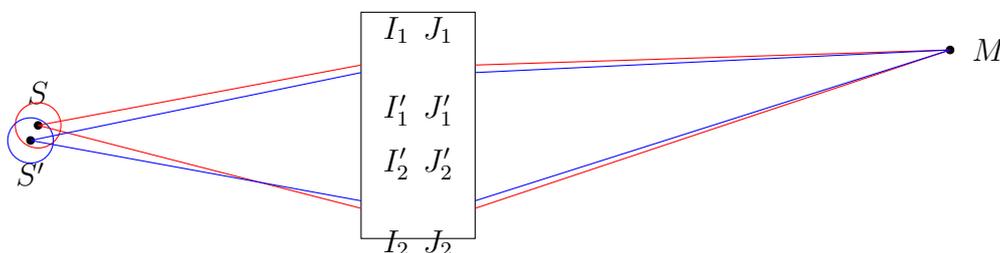
NOTES Il sera nécessaire d'avoir en tête des dispositifs à division du front d'onde et à division d'amplitude moins scolaires que les fentes de YOUNG ou l'interféromètre de MICHELSON et le FABRY-PERROT.

1. Théorème de non brouillage (théorème de localisation)

Le théorème de localisation va permettre de mathématiquement prévoir les zones de l'espace où la figure d'interférences ne sera pas brouillée, pour une source d'extension donnée.

1.1 Système optique général [69]

On considère un système optique tout à fait général. Une source étendue est utilisée pour l'éclairer, de cette source on isole deux points S et S' .



On observe les interférences au point M de l'autre côté du système.

Pour les rayons issus de S (resp S'), la différence de marche au point M est δ (resp δ') :

$$\begin{aligned}\delta &= (SM)_1 - (SM)_2 = (SI_1J_1M) - (SI_2J_2M) \\ \delta' &= (S'M)_1 - (S'M)_2 = (S'I'_1J'_1M) - (S'I'_2J'_2M)\end{aligned}$$

L'abscende de brouillage au point M se traduit par : $\delta' - \delta = 0$. Calculons :

$$\delta' - \delta = \underbrace{[(S'I'_1J'_1M) - (SI_1J_1M)]}_{\delta_1} - \underbrace{[(S'I'_2J'_2M) - (SI_2J_2M)]}_{\delta_2}$$

Nous allons nous contenter d'une égalité au premier ordre, en acceptant une légère différence : cela revient à dire qu'un léger brouillage est toléré. On calcul alors δ_1 et par

similarité, nous déterminerons δ_2 :

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= (S'I'_1) - (SI_1) + \overbrace{(I'_1J'_1M) - (I_1J_1M)}^{\delta_d} \\
&= n[\vec{u}'_1 \cdot \vec{S}'I'_1 - \vec{u}_1 \cdot \vec{S}I_1] + \delta_d \\
&\approx n\left[d(\vec{u}_1 \cdot \vec{S}I_1)\right] + \delta_d \\
&= n\left[\vec{u}_1 \cdot d\vec{S}I_1 + d\vec{u}_1 \cdot \vec{S}I_1\right] + \delta_d
\end{aligned}$$

δ_d correspond à la différence de marche dans la partie droite du schéma, après l'arrivée dans l'interféromètre. En outre, on remarque que : $\vec{u}_1 \parallel \vec{S}I_1$ par construction, et que : $\vec{u}_1 \perp d\vec{u}_1$ par définition, d'où :

$$\delta_1 = n\left[\vec{u}_1 \cdot d\vec{S}I_1\right] + \delta_d$$

on doit exprimer :

$$\begin{aligned}
d\vec{S}I_1 &= \vec{S}'I'_1 - \vec{S}I_1 \\
&= \vec{S}'\vec{O} - \vec{S}\vec{O} + \vec{O}I'_1 - \vec{O}I_1 \\
&= \vec{S}'\vec{S} + \vec{O}I'_1 - \vec{O}I_1
\end{aligned}$$

alors, en reprenant l'expression pour δ_d , on peut exprimer δ_1 comme :

$$\begin{aligned}
\delta_1 &= n\vec{u}_1 \cdot \vec{S}'\vec{S} + n\vec{u}_1 \cdot \vec{O}I'_1 - n\vec{u}_1 \cdot \vec{O}I_1 + \delta_d \\
&= n\vec{u}_1 \cdot \vec{S}'\vec{S} + \left[n\vec{u}_1 \cdot \vec{O}I'_1 + (I'_1J'_1M)\right] - \left[n\vec{u}_1 \cdot \vec{O}I_1 + (I_1J_1M)\right] \\
&= n\vec{u}_1 \cdot \vec{S}'\vec{S} + (OI'_1J'_1M) - (OI_1J_1M)
\end{aligned}$$

Les deux derniers termes, correspondent à deux chemins optiques de rayons lumineux partant d'un point O et arrivant au point M . Par le principe de FERMAT on déduit l'égalité de ces termes.

NOTES

La substitution $n\vec{u}_1 \cdot \vec{O}I_1 = (OI_1)$ n'est valable que dans le cadre du développement limité : les quatre vecteurs (primés et non primés) doivent être parallèles deux à deux, mais les rayons doivent passer par le point O .)

Finalement,

$$\delta_1 = n\vec{u}_1 \cdot \vec{S}'\vec{S} \quad \text{on déduit} \quad \delta_2 = n\vec{u}_2 \cdot \vec{S}'\vec{S}$$

d'où :

$$\delta' - \delta \approx n(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \cdot \vec{S}'\vec{S}$$

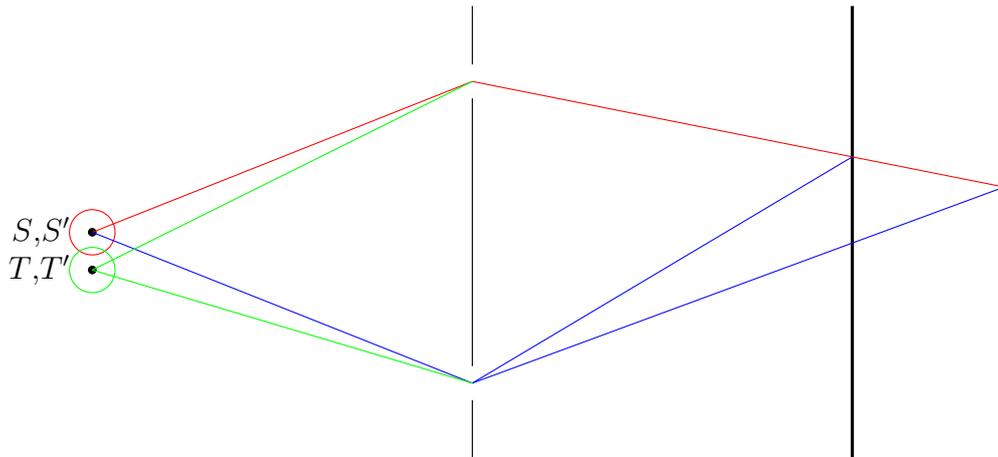
Nous disions que, pour qu'il n'y ai pas brouillage il fallait $\delta' - \delta \approx 0$ ce qui, d'après notre calcul revient à :

$$(\vec{u}_1 - \vec{u}_2) \cdot \vec{S}'\vec{S} \approx 0$$

Nous avons deux options, selon la direction des rayons incidents :

- $\vec{u}_1 \neq \vec{u}_2$, dans ce cas, $\delta' - \delta = 0 \implies \overline{S'S} \perp (\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$: pour qu'il n'y ait pas de brouillage, la source doit être étendue uniquement dans un plan perpendiculaire au plan de propagation des rayons se dirigeant vers le système optique.
- $\vec{u}_1 = \vec{u}_2$, dans ce cas, $\delta' - \delta = 0 \forall S'S'$: l'absence de brouillage n'impose aucune contrainte sur la source, mais impose que l'interféromètre ne fasse se rejoindre en M que des rayons émergents issus de rayons incidents parallèles entre eux : il ne peut pas s'agir d'un interféromètre à division du front d'onde.

1.2 Deux mots sur les fentes de YOUNG

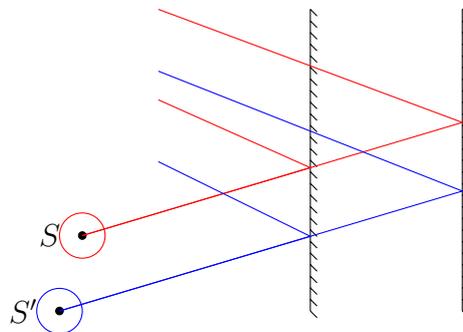


Pour une source étendue dans l'axe perpendiculaire au schéma (SS' ou TT'), en n'importe quel point de l'espace, les rayons arrivants sont issus de rayons incidents qui vérifient $\vec{u}_1 - \vec{u}_2 \perp \overline{SS'}$. Il n'y a du brouillage nulle part : les interférences ne sont pas localisées (dans le cadre de la validité du développement limité).

Pour une source étendue dans le plan du schéma (ST), on ne vérifie pas les conditions de non brouillage puisque $\overline{ST} \perp (\vec{u}_1 - \vec{u}_2)$.

1.3 Interférences par division d'amplitude

L'autre condition que l'on peut vérifier ($\vec{u}_1 = \vec{u}_2$) correspond à ce qui était annoncé dans l'introduction, c'est à dire l'interférences d'un rayon « avec lui même », comme illustré sur ce schéma :



Le système optique, que l'on appelle *lame d'air*, est constitué de deux miroirs semi-réfléchissants. On constate que les rayons incidents parallèles au vecteur directeur \vec{u}_1 sont tous renvoyés dans la même direction et cela, peu importe leur point source. Ce sont aussi les seuls à repartir dans cette direction : ils interfèrent à l'infini et sans brouillage, sans condition sur l'extension spatiale de la source. On pourra les faire interférer sur un écran par projection avec une lentille convergente.

Ce type de système est dit à *division d'amplitude* car chaque rayon est divisé avant d'être conduit à interférer avec lui même.

On rappelle que l'extension spatiale de la source permet l'obtention de figures d'interférences plus lumineuses. En contre-partie, nous sommes soumis à la localisation des interférences : elles ne sont observables que dans des régions finies de l'espace.

Le système optique présenté ici, et appelé *lame d'air* peut être généralisé et constitué de deux interfaces séparant trois milieux de propagation de la lumière (plutôt que trois zones d'air). On parlera dans le cas général de *lame mince* : les interférences sur lames minces sont celles qui donnent leur couleur aux ailes de papillons, et aux taches d'huile ou de savon.

Le système optique présenté ici, n'a pas été complètement étudié, en effet les miroirs semi-réfléchissants donnent lieu à des réflexions multiples qui risquent de compliquer l'étude. On pourrait aussi essayer d'observer des interférences dans une situation où les deux miroirs ne sont pas parallèles. Nous allons étudier ceci, dans le cas plus simple d'interférences à deux ondes, grâce à un système analogue à celui là, mais qui évite les réflexions multiples.

2. Interférences à deux ondes avec l'interféromètre de MICHELSON

L'interféromètre de MICHELSON est une solution technique similaire à celle déjà présentée qui permet d'aisément faire apparaître une figure d'interférences à deux ondes issue d'une division d'amplitude des rayons incidents.

2.1 Constitution

MÉDIA Pour les schémas et les calculs : <http://www.f-legrand.fr/scidoc/docmml/sciphys/optique/michelson2/michelson2.html>

NOTES On se place à $n = 1$.

Construire les miroirs équivalents : tous les rayons incidents (peu importe l'angle d'incidence) produisent deux rayons émergents parallèles donc la figure d'interférence est localisée à l'infini.

2.2 Configuration en lame d'air

To-Do Rédiger cette section.

2.2.1 Figure d'interférences

Différence de marche La différence de marche $\delta(\theta)$ qui existe entre deux rayons qui se rencontrent sur l'écran car ils étaient parallèles en sortie de l'interféromètre (cela car

ils sont issus du même rayon incident lui-même incident avec un angle θ), est :

$$\begin{aligned}\delta(\theta) &= (SIM) - (SIJKM) \\ &= (SI) - (SIJK) \quad (\text{MALUS et ret. inv.}) \\ &= (IJK) \\ &= IJ + JK\end{aligned}$$

Et par trigonométrie, on détermine les relations :

$$\begin{aligned}\cos(KJI) = \cos(2\theta) &= \frac{KJ}{IJ} \implies JK = IJ \cos(2\theta) \\ \cos(\theta) = \frac{e}{IJ} &\implies IJ \cos(\theta) = e\end{aligned}$$

donc finalement :

$$\delta(\theta) = IJ(1 + \cos(2\theta)) = IJ(2 \cos^2(\theta)) = 2e \cos \theta$$

La figure d'interférences va être à géométrie circulaire : on aura des anneaux brillants et des anneaux sombres. Comme la différence de marche ne dépend pas de la position de la source mais seulement de l'angle d'incidence du rayons incident, les interférences ne sont pas brouillées même pour une source étendue : c'est bien ce que l'on cherchait à obtenir.

Interférences au centre Les interférences formées au centre de l'écran ($\delta(\theta = 0) = 2e$) sont constructives ou destructives si :

$$\begin{aligned}2e &= k\lambda, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou } 2e &= (k + \frac{1}{2})\lambda\end{aligned}$$

Mais dans le cas général pour une épaisseur e quelconque, les interférence formées au centre de l'écran sont quelconques et on note :

$$2e = (k + \epsilon)\lambda$$

Anneaux Le premier anneau lumineux se forme à un angle θ_1 pour lequel la différence de marche est : $2e \cos \theta_1 < 2e$. Comme la différence de marche associée à l'angle θ_1 est inférieure à la différence de marche associée au centre de l'écran, l'ordre d'interférences va y être le premier entier inférieur à $k + \epsilon$, c'est à dire : k . Donc :

$$\delta_1 = 2e \cos \theta_1 = k\lambda$$

En continuant ce raisonnement on trouve que le n ième anneau lumineux se forme à l'angle θ_n tel que

$$\delta_n = 2e \cos \theta_n = (k + 1 - n)\lambda$$

On peut aussi calculer le rayon des anneaux lumineux formés sur l'écran à travers la lentille mince convergente L de distance focale f' :

$$r_n = f' \sin(\theta_n) \approx f' \theta_n$$

La relation $2e \cos \theta_n = (k + 1 - n)\lambda$ permet d'exprimer l'angle :

$$1 - \frac{\theta_n^2}{2} \approx \cos \theta_n = \frac{(k + 1 - n)\lambda}{2e} \implies \theta_n \approx \sqrt{2 - \frac{(k + 1 - n)\lambda}{e}}$$

d'où :

$$\begin{aligned} r_n^2 &= f'^2 \left(2 - \frac{(k + 1 - n)\lambda}{e} \right) \\ &= f'^2 \left(2 - \frac{k + 1}{e} \lambda \right) + \frac{f' \lambda}{e} n \end{aligned}$$

On peut tracer une droite $r_n = a_e n + b_e$ et une autre droite $r'_n = a_{e'} n + b_{e'}$ à épaisseur différente e' . Cela permettra par un calcul habile de déterminer λ ou e .

NOTES

On aura $a_e = \frac{f'^2 \lambda}{e}$ et la même relation pour e' , d'où :

$$a_e - a_{e'} = \frac{f'^2 \lambda}{e} - \frac{f'^2 \lambda}{e'} = f'^2 \lambda \left(\frac{e' - e}{ee'} \right)$$

et par ailleurs :

$$a_e \cdot a_{e'} = \frac{(f'^2 \lambda)^2}{ee'}$$

Donc :

$$a_e - a_{e'} = \frac{a_e a_{e'}}{f'^2 \lambda} (e' - e)$$

puis :

$$\lambda = \frac{a_e a_{e'} (e' - e)}{f'^2 (a_e - a_{e'})} \quad \text{ainsi que} \quad e' - e = \frac{f'^2 (a_e - a_{e'}) \lambda}{a_e a_{e'}}$$

d'où l'utilisation possible des anneaux en spectroscopie ou pour mesurer des variations de longueurs.

NOTES

Une autre utilisation possible pour déterminer cette fois l'écart entre deux raies de longueurs d'ondes très proches est d'exploiter le brouillage qui apparaît lors d'anticoïncidences.

2.3 Configuration en coin d'air

2.3.1 Différence de marche

2.3.2 Figure d'interférences

2.4 Applications de l'interféromètre de MICHELSON

2.4.1 Application d'origine

2.4.2 Spectroscopie par transformée de FOURIER

2.4.3 Mesure d'épaisseur

2.4.4 Tomographie optique cohérente

2.4.5 Détection des ondes gravitationnelles

3. Interférences à N ondes avec l'interféromètre de FABRY-PERROT

LP 35 : Diffraction de FRAUNHOFER

MÉDIA

Illustration de la diffraction de la lumière par la Lune lors d'occultations, on y voit que l'intensité lumineuse mesurée au sol augmente et diminue avant de s'éteindre, comme le prévoit la théorie : <https://www.youtube.com/watch?v=WDFmRLZyAf8>

MANIP'

Mettre en place la manip rigoureuse de diffraction par une fente.

La diffraction est un phénomène déjà connu par les étudiants de ce niveau mais seulement sur le plan expérimental. Il s'agit d'un phénomène qui se manifeste pour tous les types d'ondes lorsqu'elles rencontrent un obstacle son observation nécessite toutefois que la longueur d'onde de l'onde ait une taille proche de la taille de l'objet.

Dans cette leçon nous cherchons à modéliser la propagation de la lumière pour rendre compte des observations.

1. Le modèle ondulatoire de la lumière

1.1 Grandeurs utiles

On décrit la lumière principalement avec deux grandeurs : l'amplitude complexe du champ électrique $\underline{E}(M, t)$ et l'intensité lumineuse $I(M) = \langle E(M, t) \rangle^2$ mesurée par les capteurs.

La propagation de la lumière est modélisée par la propagation de E comme une onde de sorte que : si l'on considère une source ponctuelle monochromatique d'amplitude \underline{E}_0 en M , et si l'on note $\underline{E}(P)$ l'amplitude au point P à t , alors, au point P hors de la source :

$$\underline{E}(P) = \underline{E}_0 \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{r}$$

où $\mathbf{r} = \overrightarrow{MP}$ et \mathbf{k} est le vecteur d'onde (sphérique) ; l'exponentielle complexe tient compte du déphasage lié à la propagation de M à P .

Si un point P est éclairé par plusieurs sources ponctuelles de même longueur d'onde l'amplitude $\underline{E}(P)$ en P s'écrit :

$$\underline{E}(P) = \sum_{i \in \text{sources}} \underline{E}_i \frac{e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}_i}}{r_i}$$

1.2 Principe de HUYGENS-FRESNEL (1678 - 1818) [61]

1.2.1 Énoncé

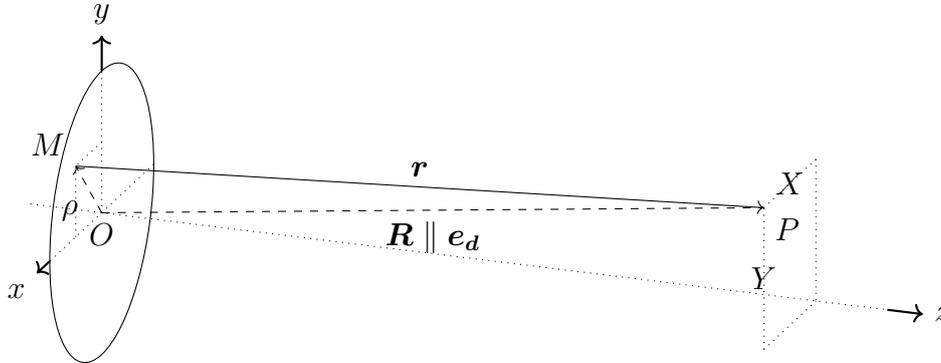
La lumière se propage de proche en proche. Dans l'espace, chaque élément de surface éclairé se comporte comme une source secondaire qui émet des ondelettes sphériques dont l'amplitude est proportionnelle à la surface et à l'amplitude de l'onde reçue.

De plus, la phase de l'onde émise est prise égale à la phase de l'onde reçue.

NOTES

Attention, normalement il faudrait prendre un déphasage de $\frac{\pi}{2}$ mais il n'aura pas d'importance dans ce que nous faisons car au final on s'intéresse à l'amplitude.

1.2.2 Mathématiquement



Si l'on considère un diaphragme D éclairé par une source ponctuelle alors, l'amplitude $\underline{E}(P)$ en un point P de l'autre côté du diaphragme est :

$$\underline{E}(P) \propto \iint_{M \in D} \underline{E}(M) \frac{e^{ikr}}{r} dS$$

Nous n'avons ici semble-t-il rien gagné puisque nous devons maintenant déterminer les amplitudes $\underline{E}(M)$. Mais dans certaines conditions expérimentales nous pourrions en fait dire que $\underline{E}(M) = \underline{E}_0 \frac{e^{ikr}}{r} \approx \underline{E}_M$ (diaphragme éclairé uniformément par une lumière cohérente, donc une source à l'infini).

L'écriture se généralise simplement dans les situations où plutôt qu'un diaphragme nous avons un objet de transmittance variable $t(M)$:

$$\underline{E}(P) \propto \iint t(M) \frac{e^{ikr}}{r} dS$$

NOTES

En principe, on doit choisir une surface fermée qui englobe la source pour appliquer le principe. Mais avec un diaphragme, l'intégrale se résumerait à l'ouverture.

2. Vers les conditions de FRAUNHOFER

Le calcul de l'intégrale est compliqué dans le cas général. L'approximation de FRAUNHOFER consiste à se placer dans des conditions expérimentales particulières qui simplifient l'expression. Nous allons les rechercher pas à pas.

2.1 Le dénominateur

Au dénominateur nous avons r , la distance entre le point d'intégration et le point d'observation. L'expression de \underline{E} serait bien simplifiée si r était constant ou du moins, si l'on

pouvait négliger ses variations dans le domaine d'intégration. Expérimentalement, à quoi est-ce que cela correspond ? La distance r varie peu si la distance R est très grande devant la taille de l'objet, en termes mathématiques :

$$r = \sqrt{R^2 + \rho^2 - 2\rho\mathbf{R}} = R\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{\rho \cdot \mathbf{e}_d}{R}\right)} \approx R \quad \text{si} \quad \frac{\rho}{R} \ll 1$$

Plaçons nous dans ces conditions, et réécrivons l'amplitude lumineuse en P :

$$\underline{E}(P) \propto \iint t(M) \frac{e^{ikr}}{R} dS \propto \iint t(M) e^{ikr} dS$$

2.2 Le terme de phase

Le terme de phase e^{ikr} va pouvoir s'exprimer $e^{i\frac{2\pi}{\lambda}\mathbf{e}_d \cdot \mathbf{r}}$ puis $e^{i\frac{2\pi}{\lambda}r}$ dans la condition $\frac{\rho}{R} \ll 1$ puisque \mathbf{R} et \mathbf{r} sont alors presque parallèles.

La phase dépend du rapport $\frac{r}{\lambda}$. Si l'on décide de faire un développement limité de r comme précédemment, nous devons faire attention à l'importance du rapport $\frac{1}{\lambda} \frac{\text{terme}}{R}$ qui diffère de l'importance du rapport $\frac{\text{terme}}{R}$. Calculons :

$$\begin{aligned} r &= R\sqrt{1 + \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 - 2\left(\frac{\rho \cdot \mathbf{e}_d}{R}\right)} \approx R \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 - \left(\frac{\rho \cdot \mathbf{e}_d}{R}\right) \right] \\ \implies \mathbf{k}\mathbf{r} &= \frac{2\pi}{\lambda} r \approx \lambda R + \frac{\rho^2}{2\lambda R} - \frac{\rho \cdot \mathbf{e}_d}{\lambda} \end{aligned}$$

Dans l'approximation de FRAUNHOFER, on cherche à négliger le terme en ρ^2 ce qui nécessite la condition : $\rho^2/\lambda R \ll 1$. Dans ce cas, $\underline{E}(P)$ devient :

$$\underline{E}(P) \propto \iint t(M) e^{ikR} e^{-ik\rho\mathbf{e}_d} dS \propto \iint t(M) e^{-ik\rho\mathbf{e}_d} dS$$

2.3 Résultat

Enfin, on peut développer le produit scalaire $\rho\mathbf{e}_d$ que nous traînons pour exprimer l'amplitude en fonctions des coordonnées $M(x, y)$ et $P(X, Y)$:

$$\underline{E}(X, Y) \propto \iint t(x, y) e^{-i\frac{2\pi}{\lambda R}(xX+yY)} dx dy$$

et l'on reconnaît ici la transformée de FOURIER de $t(x, y)$ par rapport à ses deux variables. Sur l'écran placé de sorte que $\rho^2/\lambda R \ll 1$ et $\rho/R \ll 1$, on pourra observer une image qui se trouve être la transformée de FOURIER de l'image géométrique de l'objet diffractant.

Ordres de grandeurs

To-Do Montrer qu'il faut les deux conditions et que l'une n'implique pas l'autre.

3. Exemples de figures de diffraction

To-Do Toutes les solutions ne sont pas analytiques, montrer le résultat pour la fente puis une simulation pour quelque chose de plus amusant.

4. Optique de FOURIER

To-Do Avec les transformées de FOURIER

LP 36 : Diffraction par des structures périodiques

NOTES Ne pas passer trop de temps sur les choses simples.

1. Réseau optique

1.1 Notions

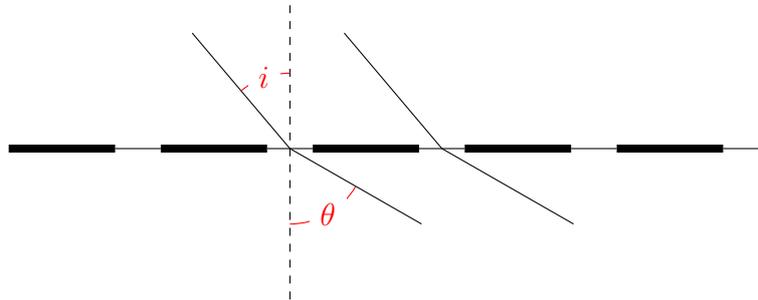
En optique, on appelle réseau une structure périodique dont le motif interagit avec la lumière. Concrètement il peut s'agir :

- d'un réseau d'amplitude dont le motif a une transparence variable (fentes, miroirs)
- d'un réseau de phase dont le motif a un indice optique variable (verre d'épaisseur variable)

Dans cette leçon, on s'intéresse au cas des fentes, éclairées avec une onde plane. On note ϵ la largeur d'une fente et a le pas du réseau. On s'intéresse aux situations où la diffraction de l'onde par les fentes n'est pas négligeable.

MANIP' Montrer la diffraction en lumière blanche par un réseau choisit pour bien montrer que l'on ne pourra pas faire l'approximation des petits angles.

1.2 Figure de diffraction



Diffraction par une fente L'amplitude de l'onde transmise par *une* fente considérée et dans la direction θ va s'écrire :

$$f(\theta) \propto \int_0^\epsilon s_i e^{jk\delta(x)} dx$$

avec $\delta(x)$ la différence de marche entre les rayons qui traversent la fente qui s'écrit :

$$\delta(x) = \epsilon(\sin i - \sin \theta)$$

donc :

$$f(\sin \theta) \propto \int_0^\epsilon s_i e^{jkx(\sin i + \sin \theta)} dx \propto \text{sinc} [\epsilon k(\sin i - \sin \theta)]$$

Diffraction par l'ensemble des fentes L'amplitude de l'onde transmise par le réseau dans la direction θ va s'écrire :

$$s(\sin \theta) = \sum_{\text{fentes}} f(\sin \theta) e^{jk\delta_n}$$

avec δ_n la différence de marche entre les rayons qui traversent le réseau par chaque fente qui s'écrit :

$$\delta_n = na(\sin i - \sin \theta) = n\delta_1$$

donc :

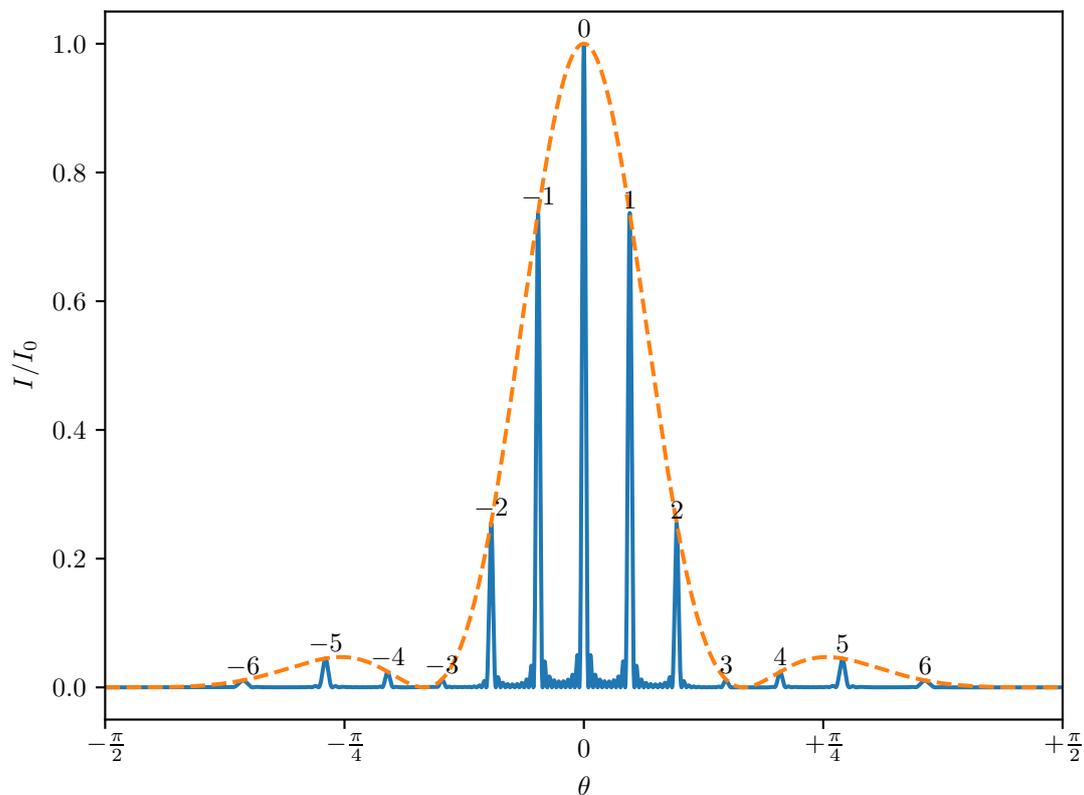
$$s(\sin \theta) = \sum_{n \in N} f(\theta) e^{jkn\delta_1} = f(\sin \theta) \sum_{n \in N} (e^{jk\delta_1})^n = f(\sin \theta) \frac{\sin(N\frac{k}{2}\delta_1)}{\sin(\frac{k}{2}\delta_1)}$$

Finalement, l'intensité de la figure de diffraction angulaire formée par le réseau éclairé avec une onde plane (et $\sin i = 0$ pour alléger les écritures) est donnée par :

$$\begin{aligned} I(\sin \theta) &= s^2(\sin \theta) \\ &= I_0 \sin_c^2(\epsilon k \sin \theta) \frac{\sin^2(N\frac{ka}{2} \sin \theta)}{\sin^2(\frac{ka}{2} \sin \theta)} \end{aligned}$$

on pose $\alpha = \frac{a}{2}k \sin \theta$ et $\beta = \epsilon/a$:

$$I(\alpha) = I_0 \sin_c^2(\beta\alpha) \left(\frac{\sin(N\alpha)}{\sin \alpha} \right)^2$$



`PYTHON` ./python/diffraction_reseau.imgen.py

L'enveloppe en \sin_c varie lentement pourvu que β soit faible. Sur l'autre facteur, on distingue les *maximas principaux* des *maximas secondaires*.

Les maximas principaux sont situés aux angles tels que $\sin(\alpha) = 0$ donc aux angles :

$$\frac{ka \sin \theta}{2} = p\pi \implies \sin \theta_p = \frac{2p\pi}{ka} = \frac{p\lambda}{a}$$

on appelle p l'ordre d'interférence. Pour rappel, les maximas de la figure de diffraction sont placés tous les $\lambda/2\epsilon$; et on peut s'intéresser à la position des maximas secondaires qui sont situés tous les λ/Na .

1.3 Pouvoir de résolution

Les réseaux sont beaucoup utilisés en spectroscopie puisqu'ils peuvent, comme des prismes, séparer des longueurs d'ondes : $I(\alpha)$ dépend de k donc de λ .

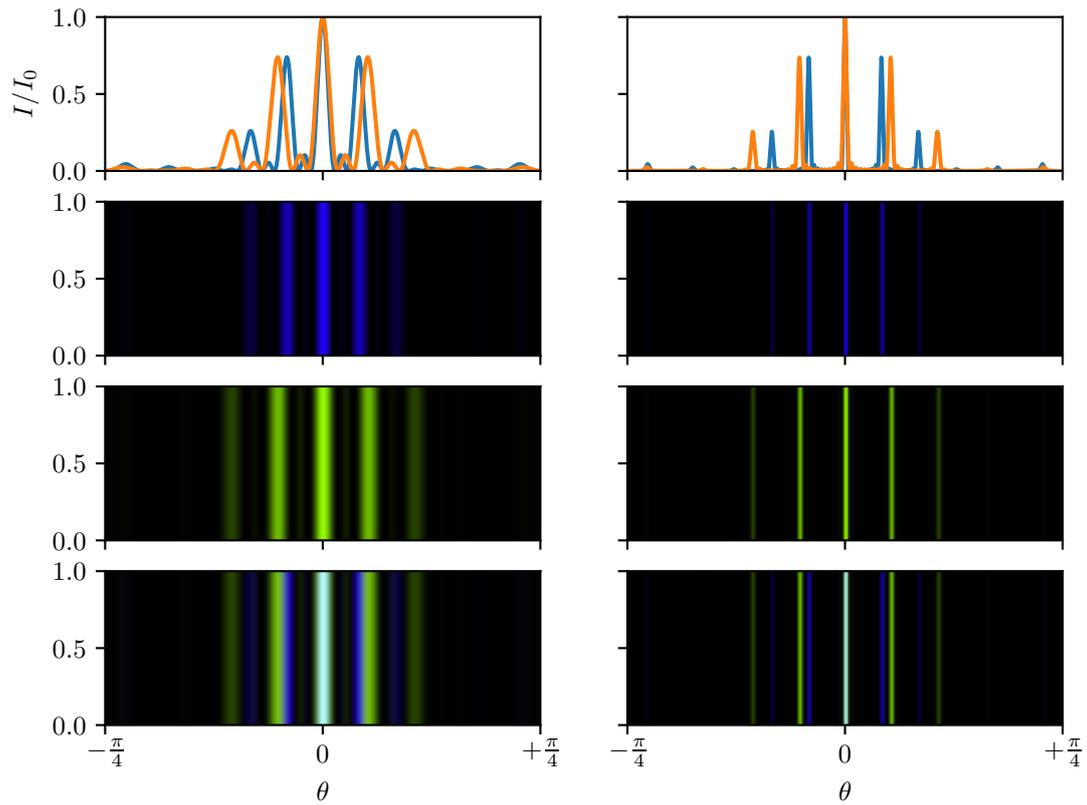
Pour ces applications il est intéressant de former des raies les plus fines possibles de manière à pouvoir en mesurer la position précisément ou même dans certains cas, en distinguer deux voisines. On veut donc minimiser la largeur angulaire $\delta\theta$ des maximas principaux. Or concernant le pic central où $\alpha \approx 0$:

$$I(\alpha) \propto \frac{\sin^2(N\alpha)}{\sin^2(\alpha)} \propto \frac{\sin^2(N\alpha)}{\alpha} \propto \sin_c^2(N\alpha)$$

la largeur à mi hauteur du sinus cardinal est $\delta \sin \theta \approx \delta\theta = \frac{\lambda}{Na}$. Les raies sont donc d'autant plus fines que le nombre de traits éclairés est grand. On appelle *finesse* du montage (réseau + source) le rapport entre l'écrat entre deux pics consécutifs et leur largeur à mi hauteur :

$$F = \frac{\Delta\theta}{\delta\theta} = N$$

Deux longueurs d'ondes consécutives séparées de $\delta\lambda$ seront discernables dans le spectre selon le critère de RAYLEIGH si $\Delta\theta > \delta\theta$ avec $\Delta\theta = \frac{p\Delta\lambda}{a}$ donc $\frac{p\Delta\lambda}{a} > \frac{\lambda}{Na}$ donc si $pN > \frac{\lambda}{\delta\lambda}$. On appelle le produit $P = pN$ *pouvoir de résolution* du montage et en pratique on veut que $\delta\lambda > \frac{\lambda}{pN}$. On doit donc éclairer le plus de fentes possible ce qui peut se faire en élargissant la source ou en augmentant le nombre de traits par unité de longueur.



2. Échographie

PYTHON `./python/echographie.py`

3. Structures cristallines

3.1 Loi de BRAGG

4. Diffraction acousto-optique

LP 37 : Absorbtion et émission de la lumière

1. Interaction lumière-matière à l'échelle quantique

1.1 Les différents processus [9]

Absorbtion, émission spontanée, émission stimulée. Schéma des niveaux quantiques.

Phases, polarisation, direction, largeur de la raie. Pas de dégénérescence.

1.2 Équations d'Einstein [9]

Bilan des trois processus. Parler d'unités. Ordres de grandeur.

1.3 Relations entre les coefficients [9]

Eq. thermique, Maxwell-Boltzmann sur les populations. Donnée la loi de Plank, on obtient une relation entre A_{10} et B_{10} et B_{01} . Transfert de puissance de l'atome vers le champ $P < 0$ tant que $N_1 < N_0$. Comment avoir $N_0 > N_1$ pour former un laser ?

2. Lasers (Masers 1654, Lasers 1956)

2.1 Pompage optique [9]

Système à 3 niveaux, éq diff sur les populations (couplées), écrire $N_1 = aN_0$, $a > 1$, bingo.

2.2 Cavité Fabry-Perrot [9]

Schéma, intérêt graph de transmittance. Avoir en tête le système à 4 niveaux du HeNe, **BUP** *Les différents lasers, tout un horizon*

NOTES

- Attention, il faut dire que tous les processus (en réalité) ne sont pas radiatifs. On peut absorber un photon, et libérer cette énergie par émission d'un phonon.
- On peut montrer l'expérience de la résonance de lampes à sodium.
- On peut montrer l'absorbtion d'une solution de $KMNO_4$ (mais il faut réfléchir à ce qu'on en dit car ici c'est plutôt une bande d'absorbtion moléculaire, et la réémission est probablement non radiative).
- Quand on parle de pertes de puissance dans le cas de l'absorbtion, on parle de pertes dans la direction du rayon incident.
- À partir de $dN = 0$ on peut retrouver la loi de Planck (ou quelque chose de proche, avec des coefficients en termes de A_{10} etc.).
- La densité spectrale du rayonnement dont on parle n'est pas toujours celle du corps noir. C'est le cas quand le rayonnement est à l'équilibre thermique.
- Même pour le maser il faut une inversion de population.

LP 38 : Aspect corpusculaire du rayonnement, notion de photons

Niveau L3

Prérequis Corps noir et loi de PLANCK Électrostatique : principe de l'électroscope
Relativité restreinte : quadrivecteur, conservations

Dans cette leçon nous étudions les expériences qui ont mené les physiciens à émettre l'hypothèse, puis valider le modèle de l'existence d'une particule de lumière porteuse d'énergie et de quantité de mouvement : le photon. Il s'agit des tout début de la mécanique quantique.

1. Constante de PLANCK, quantification du rayonnement

1.1 Rayonnement du corps noir [27]

NOTES Voir leçon sur le corps noir.

Dans les années 1880, les premières mesures quantitatives de spectres électromagnétiques révélèrent que tous les corps chauds émettaient de la lumière selon un profil similaire. En 1896, WIEN propose un modèle empirique valide pour les hautes fréquences. En 1900, RAYLEIGH propose un modèle théorique qui est conforme à l'expérience pour les basses fréquences.

PLANCK, qui cherchait une solution au problème se rendit compte que s'il faisait l'hypothèse selon laquelle l'énergie associée au rayonnement de fréquence ν était quantifiée sous la forme de paquets d'énergie :

$$\epsilon = h\nu$$

(avec $h = 6,62 \times 10^{-34}$ Js, la constante aujourd'hui dite, constante de PLANCK) alors le modèle de RAYLEIGH devenait valide.

Cette hypothèse n'avait aucun fondement théoriques, PLANCK lui même n'était alors pas convaincu par le modèle qui impliquait que les transferts d'énergie par rayonnement se faisaient de manière discrète comme par un échange de particules.

1.2 Effet photoélectrique [27] [66]

1.2.1 Préambule

HERTZ, qui faisait des expériences d'électrostatique (en 1887) se rendit compte que s'il éclairait un électroscope chargé négativement avec de la lumière du domaine ultraviolet, les feuilles d'or se rapprochaient. S'il éclairait un électroscope chargé positivement avec la même lumière, les feuilles d'or s'éloignaient.

Les physiciens analysant le phénomène émirent une hypothèse selon laquelle le rayonnement UV pouvait arracher des électrons au métal.

1.2.2 Description

En 1905, LENARD étudia ce problème et fit des expériences quantitatives.

MÉDIA <https://phet.colorado.edu/en/simulation/photoelectric>

On place deux plaques métalliques face à face dans une enceinte à vide ; un générateur de tension permet d'appliquer une tension réglable U entre les deux plaques (qui sont donc des électrodes). L'ensemble constitue une *cellule photoélectrique*. On mesure le courant entre les plaques grâce à un ampèremètre, et on éclaire l'une des plaques (définie comme cathode) avec une source monochromatique réglable (fréquence ν).

La première expérience consiste à se placer dans le cas où $U = 0$ (pas de générateur). On constate qu'il existe une fréquence seuil ν_0 à partir de laquelle le courant passe avec une discontinuité de $i = 0$ à $i > 0$.

1.2.3 Mesures

Si les électrons se déplacent de la cathode à l'anode, c'est qu'ils sont porteurs d'une certaine énergie cinétique. L'utilisation du générateur de tension va permettre de générer un champ électrique entre les électrodes, et donc d'accélérer ou freiner les électrons. Si l'on trouve une tension limite U_s pour laquelle le courant i devient nul, nous pourrions mesurer l'énergie cinétique qu'ont les électrons au moment où ils quittent la cathode. Effectuons un bilan d'énergie sur les électrons (charge $-q$) :

$$E_{c,C} + E_{p,C} = E_{c,A} + E_{p,A} \implies E_{c,C} - qV_c = E_{c,A} - qV_A \implies E_{c,A} = E_{c,C} + qU$$

On notera : $T \equiv E_{c,C}$. On se demande à quel moment un courant est mesuré : pour mesurer un courant, il faut que les électrons arrivent jusqu'à l'anode. Autrement dit,

$$E_{c,A} \geq 0 \implies U \geq -T/q$$

Si l'inégalité n'est pas vérifiée c'est que les électrons ne sont pas parvenus jusqu'à l'anode. Nous trouvons donc un moyen expérimental de mesurer T :

$$T = -qU_s$$

avec U_s la tension U seuille *sous* laquelle il y a le basculement de $i > 0$ vers $i = 0$.

Comme expérimentateur, nous avons un contrôle sur le potentiel U qui crée entre les électrodes une différence d'énergie potentielle pour les électrons $\Delta = -qU$. Concrètement, pour $T > \Delta$ on mesure un courant électrique, et pour $T < \Delta$, il n'y a pas de courant. Tout autre paramètre fixés, la transition se fait à $\Delta_s = -qU_s$.

L'énergie T correspond à l'énergie cinétique des électrons qui viennent d'être arrachés du métal, elle leur a été fournie par la lumière incidente alors, par conservation de l'énergie on écrit :

$$E_{fournie} = T + E_{liaison}$$

Notons que, si $E_{fournie} < E_{liaison}$ alors nécessairement $T = 0$ car l'électron n'est pas arraché du métal. Cela explique l'existence d'une fréquence seuil ν_0 si l'on considère que l'énergie du rayonnement augmente avec sa fréquence.

L'énergie de liaison entre les électrons et le métal ne dépend que de ce dernier : nous la traiterons comme un constante donc,

$$E_{fournie} \equiv E_f = T + \text{cste}$$

1.2.4 Énergie fournie par le rayonnement aux électrons

Il semble que, pour un rayonnement de fréquence ν fixée, si l'on augmente l'intensité lumineuse I alors l'énergie fournie à chaque électron va augmenter.

Donc, on s'attend à tracer des courbes $\Delta_s(I)$ qui vérifient : $\frac{\partial \Delta_s}{\partial I} > 0$. Mais les constatations expérimentales ne vont pas dans ce sens. On constate que $\Delta_s = T$ est indépendante de I ($\frac{\partial \Delta_s}{\partial I} = 0$), mais que $\frac{\partial i}{\partial I} > 0$: augmenter I augmente le nombre d'électrons qui circulent.

Finalement, modifier I ne change pas l'énergie cinétique T des électrons arrachés... Par contre, des expériences menées à ν variable indiqueront que, $\frac{\partial \Delta_s}{\partial \nu} > 0$, et on peut modéliser :

$$T = a\nu + \text{cste}$$

Il semble que l'énergie cinétique des électrons libérés dépende de la fréquence du rayonnement incident plutôt que de son intensité.

Nous avons par bilan d'énergie :

$$E_f = T + \text{cste} \implies T = E_f + \text{cste}$$

Et maintenant :

$$T = a\nu + \text{cste}$$

Si l'on identifie :

$$E_f = a\nu$$

on obtient un moyen de déterminer l'énergie fournie par le rayonnement à chaque électron. Les données expérimentales indiquent $a = h$, avec $h = 6,62 \times 10^{-34}$ J s qui prend la valeur de la constante de PLANCK.

Ce résultat, indépendant de l'intensité de la lumière et dépendant de la fréquence, met la physique classique en défaut. Il indique que l'échange d'énergie entre la lumière et un électron se fait avec une énergie fixée $h\nu$ (remarquons que cela confirme notre hypothèse qui expliquait l'existence de la fréquence seuil ν_0).

La constante étant en parfait accord avec la constante de PLANCK, EINSTEIN raviva en 1905 l'idée de NEWTON selon laquelle la lumière serait constituée de particules d'énergie (qui furent appelées *quantas*) et que la matière pourrait les absorber. Mais le mécanisme d'échange n'était encore pas compris.

N'oublions pas que plus l'intensité lumineuse est importante plus nombreux sont les échanges ($\frac{\partial i}{\partial I} > 0$) : le nombre de quantas augmente avec I .

2. L'apparition du photon

2.1 Diffusion COMPTON (1923) [27] [66]

To-Do Faire un schéma de l'expérience et des spectres.

La diffusion COMPTON est observée pour la première fois en 1923 lors du bombardement de cibles en graphite par des rayons X. L'expérience montre que le spectre des rayons déviés par la matière comporte deux composantes : l'une de fréquences égale à la fréquence du rayonnement incident et l'autre moins importante.

COMPTON interprète ces données comme résultats d'une collision élastique entre un quanta se comportant comme une particule ponctuelle et un électron de la cible de graphite. Le transfert d'énergie associé à la collision se traduit par une modification de la fréquence du rayonnement.

Si l'on considère un quanta d'énergie E_X et d'impulsion \mathbf{p}_X qui collisionne un électron au repos ($\mathbf{p}_e = \mathbf{0}$) d'énergie de masse $m_e c^2$, les bilans d'énergie et d'impulsion vont s'écrire :

$$\begin{aligned}E_X + m_e c^2 &= E'_X + E'_e \\ \mathbf{p}_X &= \mathbf{p}'_X + \mathbf{p}'_e\end{aligned}$$

Considérant les résultats de PLANCK et d'EINSTEIN pour l'énergie d'un quanta associé à un rayonnement de fréquence ν , on écrit :

$$h\nu + m_e c^2 = h\nu' + E'_e \implies E'_e = m_e c^2 - h(\nu - \nu')$$

par ailleurs,

$$\begin{aligned}E_e'^2 &= m_e^2 c^4 + \mathbf{p}'_e{}^2 c^2 \\ &= m_e^2 c^4 + (\mathbf{p}_X - \mathbf{p}'_X)^2 c^2\end{aligned}$$

En écrivant $E_X = p_X c = h\nu$ et $E'_X = p'_X c = h\nu'$ puis en traitant les équations ([27]), on pourra obtenir :

$$\nu - \nu' = \frac{h\nu\nu'}{m_e c^2} (1 - \cos \theta)$$

où θ est l'angle auquel le rayonnement dévié est mesuré. Ce résultat est annoncé sous l'hypothèse que la lumière peut-être traitée comme une particule lors de collisions. Cette particule porteuse d'énergie serait aussi porteuse d'une *quantité de mouvement*.

Les résultats surprenant de COMPTON eurent d'abord du mal à être acceptés mais finirent par convaincre les scientifiques qu'un modèle corpusculaire pouvait *aussi* être utilisé pour décrire la lumière. Ces particules furent appelées *photons*.

2.2 Le photon [66] [31]

2.2.1 Énergie

Comme nous l'avons vu, un photon porte l'énergie $\epsilon = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$, avec $h = 6,62 \times 10^{-34}$ J s et $c = 3 \times 10^8$ m s⁻¹.

2.2.2 Quantité de mouvement, masse, vitesse

Nous avons vu que l'énergie d'un photon est $E = h\nu$, sa quantité de mouvement est, par conséquent $\mathbf{p} = h\nu/c \mathbf{u}$, ce que l'on écrit en relativité restreinte :

$$\mathbf{P} = \left(\begin{array}{c} h\nu \\ \frac{h\nu}{c} \mathbf{u} \end{array} \right) \implies m_p^2 c^4 = -E^2 + \mathbf{p}^2 c^2 \implies m_p = 0$$

Puisqu'il est vecteur de la lumière il se déplace à la même vitesse (c dans le vide et, c/n dans un milieu d'indice n).

Pour ordre de grandeur, la quantité de mouvement portée par un photon du visible à $\lambda = 500 \text{ nm}$ ($\nu = 600 \times 10^{12} \text{ Hz}$) est d'environ $p = 1,3 \times 10^{-27} \text{ kg m s}^{-1}$. Cette valeur est très faible mais il semblerait que avec une mole de photons ($N = 6 \times 10^{23}$) incidente chaque seconde, on obtiendrait une valeur de force $F_{mole} = \frac{p_{mole}}{1 \text{ s}} = 8,0 \times 10^{-4} \text{ N}$ largement mesurable.

2.2.3 Nombre de photons [66], pression de radiation

Laser Dans les expériences d'optiques il est rare que l'aspect corpusculaire de la lumière se manifeste. Estimons le nombre de photons émis chaque seconde par un laser hélium-néon ($\lambda = 633 \text{ nm}$, $\nu = 473 \times 10^{12} \text{ Hz}$) de puissance $P = 1,0 \text{ mW}$. Pendant $\Delta T = 1 \text{ s}$, le laser délivre une énergie $E = P\Delta T = 1 \times 10^{-3} \text{ J}$. L'énergie d'un photon est $\epsilon = h\nu = 3,1 \times 10^{-19} \text{ J}$ alors le nombre de photons est :

$$N = \frac{E}{\epsilon} = 3,2 \times 10^{15}$$

Ce nombre est élevé et explique que l'on ne perçoit pas l'aspect granulaire de la lumière. Il reste cependant trop faible devant le nombre d'AVOGADRO ($\frac{N}{N_A} = 5,3 \times 10^{-9}$) pour envisager une poussée détectable ($F_{laser} = 10^{-13} \text{ N}$).

Voile solaire Le flux énergétique solaire mesuré hors de l'atmosphère est lui de l'ordre $\varphi = 1000 \text{ W m}^{-2}$ ($= 1 \text{ mW mm}^{-2}$), l'énergie étant centrée autour du domaine de longueurs d'onde visibles, une estimation à $\lambda = 500 \text{ nm}$ prévoit une *pression* proche de $P = 6 \times 10^{-6} \text{ N m}^{-2}$.

Pour accélérer une masse de 1 kg à 1 m s^{-2} , la surface utile sur laquelle les photons solaires seraient collectés devrait être de l'ordre de $150\,000 \text{ m}^2$, atteignable avec un carré de 400 m de côté. Ces valeurs semblent proche de l'irréel mais l'agence d'exploration aérospatiale japonaise a développé un démonstrateur de *voile solaire* nommé IKAROS : le satellite de 315 kg constitué d'une voile en polymère réfléchissant de 15 kg et de superficie 173 m^2 (carrée de côté $14,1 \text{ m}$, d'épaisseur $7,5 \mu\text{m}$) peut augmenter sa vitesse d'une dizaine de mètre par seconde chaque mois ($9,5 \text{ m s}^{-1} \text{ mois}^{-1}$).

MÉDIA

Photo de IKAROS déployé en orbite, prise par la caméra ejectée :
http://global.jaxa.jp/press/2010/06/img/20100616_ikaros_3.jpg

Trajectoire de IKAROS, qui utilise sa voile solaire pour ajuster son orbite jusqu'à croiser Vénus :

http://www.isas.jaxa.jp/e/forefront/2011/tsuda/image/fig_03.gif

Queue des comètes Toujours dans l'espace, l'orientation de la queue de poussière des comètes s'explique par la pression de radiation exercée par le Soleil sur leur *chevelure*.

MÉDIA

La comète périodique ENCKE découverte depuis Paris en 1786. Ici imagée par la NASA en 2007, « perdant » sa queue :

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Encke_tail_rip_of.gif

Diagramme d'une comète (image NASA) :

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Comet_Parts.jpg

Position de la queue avant et après le périhélie [23] :

<http://www.astro.ulg.ac.be/~demoulin/queue.gif>

Pour aller plus loin

On pourra parler d'une expérience plus moderne [66] [31] dans laquelle on éclaire avec une source de photons uniques une lame semi-réfléchissante. Des détecteurs recueillent les faisceaux transmis et réfléchis, on constate qu'ils fournissent des signaux de pics brefs qui ne sont jamais simultanés.

On pourra réinsister sur la caractère *dual* onde-corpuscule de la lumière en rappelant les résultats de l'expérience des fentes de YOUNG à un photon.

Le moment cinétique $L = h\nu/\omega = \hbar$ porté par les photons de lumière polarisée circulairement n'a pas été évoqué, mais on peut décrire l'expérience dans laquelle on mesure un couple exercé par la lumière sur une lame biréfringente [22].

C'est suite à cette leçon que nous pourrions décrire les processus microscopiques d'interaction lumière-matière d'absorption et d'émission. En particulier, on reviendra vers la notion de quantité de mouvement des photons si l'on désire décrire les expériences de refroidissement d'atomes.

LP 39 : Aspect ondulatoire de la matière, notion de fonction d'onde

LP38 prérequis

1. Associer des ondes aux particules

1.1 L'hypothèse de De Broglie (1923) [27]

Einstein a proposé $\lambda = c/\nu$. De Broglie propose $\lambda = h/p$.

1.2 L'expérience de Davinson et Gremer (1927) [16]

Rayons X sur cristaux. Schéma, description, résultats. Même expérience avec des électrons sur du Nickel, même résultats. ODG. Conforme un caractère ondulatoire des électrons. Se fait aussi avec des neutrons [15] [16].

1.3 Analogues des fentes de Young

Avec atomes d'Hélium [16]. Analogie du biprisme de Fresnel pour les électrons [15]. Avoir en tête que ça peut exister avec des molécules [16]. Quoi qu'il en soit, l'expérience ne correspond pas à une description classique. Les probabilités ne sont pas additives.

2. Fonction d'onde et évolution

2.1 À la recherche d'une fonction d'onde [27] [16]

Situation : probabilités non additives, comportement ondulatoire, longueur d'onde. Schrodinger cherche alors une équation d'onde comme une onde de probabilités. Relation de dispersion, hypothèse d'une onde plane. Postulat P = ...

2.2 L'équation de Schrodinger [27]

Équation de propagation, calcul des dérivées, réécriture de $E = p^2/2m$ par identification. Cas d'une particule non libre : $H = T+V$.

2.3 Principe de superposition, terme d'interférences [16]

Somme de deux fonctions d'onde, apparition d'un terme d'interférences

2.4 Courant de probabilités [15]

S'il reste du temps. Ouvrir vers la relat : Dirac, Klein-Gordon. Nickel $55\text{eV} \ll m_0^2 c^2 = 551\text{keV} \gg$ 1919, spectro de l'atome dehydrogène valide l'eq de Schrodinger De Broglie pour les quarks : 10^{-18}m conforme à l'expérience

LP 40 : Confinement d'une particule et quantification de l'énergie

Niveau L2

Prérequis Mécanique classique Notion de fonction d'onde Équation de SCHRÖDINGER

1. Approche historique

1.1 Les spectres discrets de raies [27]

Les premières raies spectrales sont observées avec des prismes par Thomas MELVILL (1752, Sodium, émission), William WOLLASTON (1802, Soleil, absorption), Joseph FRAUNHOFER (1814, Sodium dans le Soleil, absorption), et ANGSTRÖM (hydrogène).

En 1885, BALMER puis en 1889, RYDBERG donnent une structure mathématique régulière en longueur d'ondes aux raies visibles de l'hydrogène :

$$\frac{1}{\lambda_n} = R_y \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

(avec la constante alors expérimentale $R_y = 1,096\,78 \times 10^5 \text{ cm}^{-1}$). Ils utilisent cette formule pour prédire avec succès la longueur d'onde d'autres raies de l'hydrogène situées dans l'ultraviolet.

To-Do Ajouter un spectre annoté de l'hydrogène.

Suite aux travaux de PLANCK sur le corps noir (1900), la présence de ces raies pose un problème à résoudre. Mais l'effet photoélectrique d'EINSTEIN (et PLANCK) en explique une partie.

1.2 Modèle de BOHR de l'atome

To-Do Parler du problème du non rayonnement des atomes, de leur stabilité, et de la désionisation qui donne toujours les mêmes atomes.

Il s'agit d'un traitement classique de l'atome, dans lequel on introduit une hypothèse de quantification.

On considère l'atome d'hydrogène comme un noyau de masse m_p autour duquel circule un électron de masse $m \ll m_p$. On se place dans les hypothèses du problème à deux corps type mouvement de KÉPLER, avec une force d'interaction électrostatique :

$$m\mathbf{a} = \frac{-q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \mathbf{e}_r = \frac{e^2}{r^2} \mathbf{e}_r \quad \text{avec} \quad e^2 \equiv \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0}$$

Dans le cadre d'une trajectoire circulaire, on écrira :

$$mr\dot{\theta}^2 = \frac{e^2}{r^2} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{L}\| = mr^2\dot{\theta}$$

Pour résoudre les problèmes énoncés, Niels BOHR introduit en 1913 un postulat selon lequel il existe des orbites circulaires stables pour les électrons : une fois sur l'une de ces orbites, l'électron ne rayonne aucune énergie électromagnétique. Il ajoute que l'électron peut passer d'une orbite stable à une autre par absorption ou émission d'un photon dont l'énergie correspond à l'écart en énergie de l'électron entre les deux orbites.

To-Do Schéma

La *règle de quantification* que donne BOHR pour identifier les orbites stables parmi les autres s'écrit :

$$\|\mathbf{L}\| = n\hbar$$

En conséquences, les expressions de \mathbf{a} et \mathbf{L} permettent d'écrire :

$$\frac{n^2\hbar^2}{mr^3} = \frac{e^2}{r^2} \implies r = \frac{n^2\hbar^2}{me^2} \equiv a_0 n^2$$

avec a_0 le rayon de BOHR.

L'énergie potentielle (d'origine électrostatique) de l'électron sur l'une de ces orbites s'écrit :

$$E_p = -\frac{e^2}{r_n}$$

le principe fondamental de la dynamique :

$$\begin{aligned} m\mathbf{a} &= -\frac{\partial E_p}{\partial r_n} \mathbf{e}_r = -\frac{e^2}{r_n^2} \mathbf{e}_r \\ &= -m \frac{v^2}{r_n} \mathbf{e}_r \end{aligned}$$

donne l'énergie cinétique :

$$E_c = \frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{2r_n}$$

d'où l'énergie mécanique du système :

$$E_n = \frac{-1}{2} \frac{e^2}{r_n} = \frac{-1}{2} \frac{e^2}{a_0 n^2}$$

L'hypothèse de BOHR sur la position des électrons implique une quantification de leur énergie. Comme le suggère le titre de la leçon il existe un lien fort entre confinement (ici sur une orbite) et quantification de l'énergie.

On retrouve l'expression expérimentale de RY pour la longueur d'onde d'une raie de l'hydrogène correspondant à une transition de l'électron d'une orbite i vers j , avec $\Delta E = \frac{hc}{\lambda}$:

$$\Delta E = E_j - E_i = \frac{-e^2}{2} \left(\frac{1}{r_j} - \frac{1}{r_i} \right)$$

en réintroduisant toutes les grandeurs :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{-mq^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c} \left(\frac{1}{j^2} - \frac{1}{i^2} \right) \equiv R_y \left(\frac{1}{j^2} - \frac{1}{i^2} \right)$$

où l'on donne une expression pour R_y . On remarquera que le calcul permet de déterminer l'énergie d'ionisation de l'hydrogène en considérant une transition de l'état $i = 1$ vers $j = \infty$: $E_{ion} = hcR_y = 13,6 \text{ eV}$.

2. Confinement d'une particule

2.1 Puit de potentiel infini [27]

2.1.1 Équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps [27]

NOTES Donner l'équation de SCHRÖDINGER, présenter la séparation des variables, la solution sur $\xi(t)$ puis l'équation sur $\varphi(x)$.

2.1.2 Résolution

NOTES Présentation, résolution. Passer vite sur les cas sans intérêt. Spectre et fonctions d'onde [27]. Même solutions que la corde vibrante. État de plus basse énergie on nulle : Heisenberg.

PY-DO Ajouter une animation qui trace les $\Psi_n(x, t)$ et $|\Psi_n(x, t)|^2$.

2.1.3 Applications numériques

Le puit étudié ici est très théorique mais certains problèmes réels s'en approchent :

- nucléons dans le noyau,
- électrons dans des jonctions de semi-conducteurs,
- particule α dans un noyau de U.

2.2 Retour sur l'atome d'hydrogène

NOTES Rapidement, donner le potentiel (non nul mais indépendant du temps), dire que l'on peut séparer les variables temporelles et spatiales puis radiales et angulaires, dire que les calculs sont très longs pour $Y(\theta, \varphi)$, et donner l'équation pour $R(r)$.

On en déduit les énergies, qui grandissent en $1/n^2$ et se resserent.

L'existence d'une énergie minimale non nulle donne un rayon minimal non nul qui assure la stabilité de la matière et des solutions aux autres problèmes que BOHR cherchait à résoudre.

PY-DO Préparer des graph des solutions radiales et de la densité de probabilité pour $l = 0$.

NOTES On fera remarquer que la solution diverge en $r = 0$ mais ça ne pose pas de problème quant à la densité de probabilité car en coordonnées sphériques, elle s'écrit :

$$\rho(r, \theta, \varphi) = |\Psi(r, \theta, \varphi)|^2 r^2 dr \sin \theta d\theta d\varphi$$

et : $r^2 e^{-\frac{2r}{a_0}}$ ne diverge pas.

Pour aller plus loin

Dans cette leçon nous avons étudié en détails le problème dit de la *particule dans une boîte*. Il s'agit bien d'une particule confinée et l'on trouve que son énergie est quantifiée. Nous avons vu comment le procédé de ce calcul peut être appliqué pour résoudre le problème de l'atome d'hydrogène.

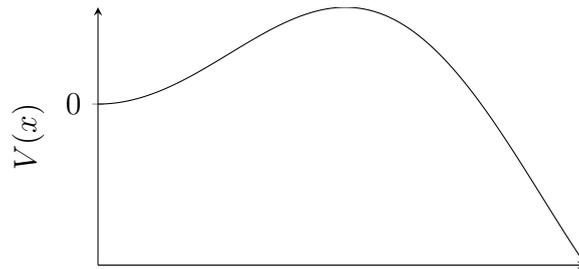
Dans la suite du cours, on pourra illustrer la résolution de l'équation de SCHRÖDINGER sur le problème du potentiel harmonique, qui modélise de manière approchée les potentiels continus autour des positions d'équilibres.

LP 41 : Effet tunnel

Niveau L3

Prérequis Notion de fonction d'onde Équation de SCHRÖDINGER États liés et quantification Densité d'états en physique statistique

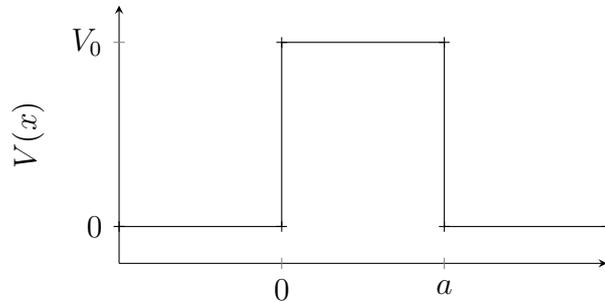
Dans cette leçon qui fait suite à celle sur la quantification (dans laquelle nous avons décrit une particule confinée dans un potentiel), nous étudions le cas d'une particule qui va pouvoir évoluer semble-t-il sur un demi-espace.



1. Barrière de potentiel rectangulaire [27]

1.1 Description

Comme pour l'étude des potentiels confinants, nous commençons par un cas qui semble simple.



Une particule de masse m arrive de la gauche ($x < 0$, x croissant), avec une énergie E comprise entre 0 et V_0 . La mécanique classique prévoit une réflexion de la particule sur la barrière.

1.2 Équation de SCHRÖDINGER

De l'équation de SCHRÖDINGER à une dimension pour un potentiel indépendant du temps :

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(t, x) = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(x) \right) \Psi(t, x)$$

nous rappelons une classe de solutions issue de la séparation des variables :

$$\Psi(t, x) = f(t) \cdot \psi(x)$$

les deux fonctions vérifiant alors :

$$f(t) = e^{-i\frac{E}{\hbar}t} \quad \text{et} \quad \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \psi(x) = E\psi(x)$$

1.2.1 Solutions des équations stationnaires

Dans les régions **1** ($x < 0$) et **2** ($x > a$) où $V(x) = 0$ on écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = E\psi(x) \implies \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -k^2\psi(x) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$$

alors, la solution générale dans chaque région est :

$$\begin{aligned} \psi_1(x) &= A_1 e^{ikx} + B_1 e^{-ikx} \\ \psi_2(x) &= A_2 e^{ikx} + B_2 e^{-ikx} \end{aligned}$$

Dans la région **0** ($0 < x < a$) où $V(x) = V_0$ on écrit :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = (E - V_0)\psi(x) \implies \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = -\kappa^2\psi(x) \quad \text{avec} \quad \kappa^2 = \frac{-2m|E - V_0|}{\hbar^2}$$

cette fois la solution générale est :

$$\psi_0(x) = A_0 e^{\kappa x} + B_0 e^{-\kappa x}$$

1.2.2 Fonctions d'ondes

En écrivant les fonctions d'ondes qui correspondent :

$$\begin{aligned} \Psi_1(t, x) &= A_1 e^{i(kx - \frac{E}{\hbar}t)} + B_1 e^{-i(kx + \frac{E}{\hbar}t)} \\ \Psi_0(t, x) &= A_0 e^{\kappa x - i\frac{E}{\hbar}t} + B_0 e^{-\kappa x - i\frac{E}{\hbar}t} \\ \Psi_2(t, x) &= A_2 e^{i(kx - \frac{E}{\hbar}t)} + B_2 e^{-i(kx + \frac{E}{\hbar}t)} \end{aligned}$$

nous trouvons dans les régions 1 et 2 des équations d'ondes qui sont combinaisons linéaires d'ondes planes progressives (OPP). Les OPP associées aux coefficients A_i (B_i) correspondent à une propagation dans le sens $+x$ ($-x$) :

- l'OPP associée au coefficient A_1 correspond à la particule incidente,
- l'OPP associée au coefficient B_1 correspond à la particule réfléchie,
- l'OPP associée au coefficient A_2 correspond à la particule transmise,
- l'OPP associée au coefficient B_2 correspond à la particule qui aurait été réfléchie loin à l'infini.

Dans notre modèle simple, le seul « obstacle » est la barrière située entre $x = 0$ et $x = a$: l'OPP associée à B_2 n'a donc pas lieu d'être, nous allons imposer $B_2 = 0$.

Sur la solution globale On remarquera qu'elle n'est pas de carré sommable. La particule se trouvera donc en réalité dans une combinaison linéaire (une superposition quantique) de ces états (que l'on appelle un *paquet d'ondes*). Notons que le spectre accessible est continu, il n'y a plus de quantification.

1.3 Réflexion et transmission

To-Do Voir si l'introduction/utilisation du courant de probabilités est nécessaire ou non. Il donne de toute façon $R = |B_1|^2$ et $T = |A_2|^2$, comme nous l'interprétons déjà. Si oui, l'ajouter aux prérequis.

To-Do Donner le mode de calcul pour $R = |A_2|^2$ et $T = |B_1|^2$ en fonction de E (et de A_1 comme paramètre). Mais ne pas le faire car c'est très long et les expressions sont moches et vont prendre du temps à écrire.

Remarquer que $R + T = 1$.

Py-Do Tracer les graphes des fonctions $R(E)$ et $T(E)$ en faisant apparaître la valeur de V_0 ; puis animer $\Psi(t, x)$.

1.4 Présence « dans » la barrière

NOTES Remarquons que puisque $R + T = 1$, la probabilité de présence de la particule entre $x = 0$ et $x = a$ est nulle.

Cependant, si l'on y place un détecteur, on va détecter la particule (car on ajoute un trou!).

2. Ordres de grandeurs dans des potentiels réels

2.1 Microscope à effet tunnel

L'effet tunnel présente un intérêt technologique...

2.2 Électrons dans les transistors

Mais il pose aussi des problèmes...

2.3 Particule α dans les noyaux lourds

S'il semble associé à des conditions bien spécifiques, n'oublions pas qu'il s'agit d'abord d'un phénomène naturel...

Pour aller plus loin

On pourra montrer qu'une particule d'énergie $E > V_0$ n'est pas indifférente à la présence de la barrière. Ensuite, on pourra discuter la modélisation de potentiels réels selon l'approximation WKB [27].

LP 42 : Fusion, fission

Niveau L3

Prérequis Atomistique Classification périodique Machines thermiques

Le graphe sur lequel on représente l'abondance des éléments chimique dans l'univers en fonction de leur numéro atomique, présente quelques particularités.

MÉDIA <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:SolarSystemAbundances.png?uselang=fr>

Dans cette leçon nous allons discuter des noyaux atomiques, nous proposerons un modèle semi-empirique pour les décrire et expliquer la tendance du graphe.

Nous parlerons de radioactivité, découverte par Henri BECQUEREL en 1896.

1. Le noyau atomique [52]

1.1 Densité et interactions internes

RUTHERFORD a montré en 1932 que les atomes d'or étaient majoritairement vides, composés d'électrons qui circulent autour d'un noyau dont il put estimer la taille. Connaissant la taille du noyau et sa masse, on peut en calculer la densité :

¹⁹⁷ ₇₉ Au	Rayon (pm)	Masse (u)	Densité (kg m ⁻³)
Atome	135	196	31 × 10 ³
Noyau	0,027	196	3,9 × 10 ¹⁵

On constate que la densité nucléaire est bien supérieure à celle de la matière. On sait par ailleurs que les noyaux sont composés de protons, de charge $+e$. La force de COULOMB s'y exerce, et doit être compensée par une autre pour assurer la stabilité des noyaux : c'est l'interaction forte qui joue ce rôle, en exerçant des forces attractives entre les nucléons.

Interaction	Portée (m)	Intensité (relative)	Au sein du noyau
Gravitationnelle	∞	10 ⁻²⁶	Négligeable
Électrostatique	∞	10 ⁻³	Entre les protons
Forte	10 ⁻¹⁵	1	Entre les nucléons
Faible	10 ⁻¹⁸	10 ⁻⁷	Entre particules élémentaires

On constate d'ailleurs, expérimentalement, une corrélation entre le nombre de protons et le nombre de neutrons.

MÉDIA [Demie-vie des nucléides observés \(age de l'univers 13,8 × 10⁹ an\) :](https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/80/Isotopes_)
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/8/80/Isotopes_

and_half-life.svg/2000px-Isotopes_and_half-life.svg.png

MÉDIA

Simulation d'une population de particules dont la demie-vie est de 10s :
<https://meaningof42.github.io/radioactive/main.html>

1.2 Composition et masse

NOTES

Dans la suite de la leçon, on jongle entre les unités en suivant l'équivalence : $1 \text{ u} = 931,5 \text{ MeV}/c^2$. Certains ouvrages changent de système d'unité et posent $c^2 = 1$ de sorte à pouvoir écrire que $1 \text{ u} = 931,5 \text{ MeV}$, ce qu'on évitera ici. On utilisera en revanche l'unité d'énergie uc^2 .

Une dernière chose à découvrir concernant les noyaux :

Particule	Masse (u)
Proton	1,0073
Neutron	1,0087

Particule	Masse (u)	Déficit de masse (u)	(MeV/c ²)	Énergie de liaison par nucléons (uc ²)
Noyau d'or ¹⁹⁷ 79Au 79 p + 118 n	196,9272 198,6033	1,6761	1561	7,92
Noyau de deutérium ² 1H p + n	2,0136 2,0160	0,0024	2,24	1,12
Noyau de fer ⁵⁶ 26Fe p + n	55,9216 56,4508	0,5292	492,9	8,80

La somme de la masse des particules qui composent un noyau n'est pas égale à la masse du noyau. Il existe ce que l'on va appeler un déficit de masse (ou excès, selon ce que l'on regarde) :

$$\Delta m = [Zm_p + (A - Z)m_n] - m(A, Z) > 0$$

Les nucléons qui composent un noyau stable sont liés entre eux par des interactions attractives d'énergie $E_l < 0$. Lorsque l'on veut dissocier un noyau stable en nucléons isolés, on doit apporter l'énergie $B = -E_l$. Par la relation d'EINSTEIN $E = mc^2$, on mesure dans le système de nucléons isolés, un excès de masse $\Delta m = B/c^2$.

Pour caractériser la stabilité des nucléons dans un noyau, il est plus pertinent de discuter de l'énergie de liaisons *par nucléons*, puisque pour deux noyaux de nombre de masses A_1 et $A_2 > A_1$ de même énergie de liaison $B_1 = B_2$, l'énergie de liaison par nucléons $\frac{B_1}{A_1} > \frac{B_2}{A_2}$ nous renseignera sur l'énergie moyenne de chaque nucléons au sein du noyau.

En revenant sur les exemples précédents, on pourra dire que le noyau de fer est plus lié que le noyau d'or qui est plus lié que le noyau de deutérium.

MÉDIA

Énergie de liaison par nucléons pour les isotopes les plus courants :
https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/2/29/Binding_energy_curve_-_common_isotopes_FR.svg/690px-Binding_energy_curve_-_common_isotopes_FR.svg.png

Rapidement, calculons la masse portée par l'énergie de liaison de l'électron dans l'atome d'hydrogène : $B = 13,6 \text{ eV}$, donc $\Delta m = 1,5 \times 10^{-8} \text{ u}$. Elle est négligeable.

1.3 Modèle de la goutte liquide

La valeur de l'énergie de liaison est prévisible par un modèle semi-empirique, dit *de la goutte liquide* car nous allons modéliser le noyau comme un volume (une goutte) rempli de particules (les nucléons) parmi lesquelles celles en surface apportent une énergie négative.

La formule de BETHE-WEIZSÄCKER (1936) s'énonce :

$$B(A, Z) = \underbrace{E_v}_{\propto A} - \underbrace{E_c}_{\propto \frac{e^2 Z(Z-1)}{R}} - \underbrace{E_s}_{\propto 4\pi R^2} - \underbrace{E_a}_{\propto \frac{(A-2Z)^2}{A}}$$

Les quatre termes d'énergie sont :

- l'énergie due à l'interaction forte (v pour volume)
- l'énergie électrostatique (c pour COULOMB)
- l'énergie de surface
- l'énergie d'antisymétrie (lié au principe d'exclusion de PAULI)

To-Do Une biblio qui explique le terme d'antisymétrie ?

La densité nucléaire discutée plus haut et donnée pour l'atome d'or ($3,9 \times 10^{15} \text{ kg m}^{-3}$) est en fait constante pour tous les noyaux, on pourra écrire :

$$\rho = \frac{4}{3}\pi R^3 \quad \text{et} \quad \rho \propto A^3 \quad \text{d'où} \quad R \propto A^{1/3}$$

Expérimentalement, $R = 1,2 A^{1/3} \text{ fm}$. On a :

$$B(A, Z) = a_v A - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} - a_s A^{2/3} - a_a \frac{(A-2Z)^2}{A}$$

avec les valeurs numériques tabulées pour les coefficients :

$$\begin{aligned} a_v &\approx 16 \text{ MeV} & a_c &\approx 0,7 \text{ MeV} \\ a_s &\approx 17 \text{ MeV} & a_a &\approx 23 \text{ MeV} \end{aligned}$$

1.4 Stabilité

Le modèle permet alors de prévoir l'isotope le plus stable d'un élément de la classification périodique. Une recherche des valeurs qui vérifient $\left. \frac{\partial B}{\partial A} \right|_Z = 0$ donnera l'équation de la *vallée de stabilité* présentée précédemment.

Sous cette compréhension de l'énergie de liaison, la courbe $B(A, Z)$ présente le fer ^{56}Fe comme extrémum le plus stable.

Les systèmes physiques gouvernés par des énergies potentielles évoluent de sorte à minimiser ces dernières, on comprend que certains processus analogues à des réactions chimiques peuvent être thermodynamiquement favorables, lorsque l'énergie B augmente.

2. Fission

2.1 Fission spontanée

Nous étudions le processus :



on constate que le nombre de masses et le nombre de charges est bien conservé.

Particule	Énergie de liaison par nucléons (MeV)	
$^{238}_{92}\text{U}$	1801	1801
$^{145}_{57}\text{La}$	1199	
$^{90}_{35}\text{Br}$	763	1962
^1_0n	0	

2.2 Fission induite

2.3 Réacteurs à fission

3. Fusion

3.1 Fusion stellaire, l'origine des éléments

3.2 Réacteurs à fusion

LP 43 : Évolution temporelle d'un système quantique à deux niveaux

Niveau L3

Prérequis Équation de SCHRÖDINGER Fonction d'onde Notation de DIRAC Confinement, quantification États stationnaires Effet tunnel

Suite à l'étude des potentiels confinants et de l'effet tunnel, qui étaient des premiers exemples d'exercices de mécanique quantique. Dans ces situations, on résolvait l'équation de SCHRÖDINGER indépendante du temps ($i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi \rightarrow H\Psi = E\Psi$) et l'on obtenait des états stationnaires.

On s'intéresse dans cette leçon à des états quantiques qui sont superposition d'états stationnaires d'énergies différentes : ces états vont manifester une évolution temporelle non triviale.

1. Le double puits de potentiel : système à deux niveaux [10, 18, 40]

NOTES L'étude objet de cette leçon peut très bien se faire de manière abstraite en définissant des états $|1\rangle$ et $|2\rangle$ et une combinaison linéaire $|\Psi\rangle = a|1\rangle + b|2\rangle$, mais...

Les systèmes type « double puits » sont des systèmes qui peuvent fonctionner comme bonnes approximations de systèmes à deux niveaux. L'intérêt de les étudier dans cette leçon est de permettre une représentation visuelle pour laquelle on apprécie le système préparé en superposition d'états.

1.1 Exemples et modèle

Le problème du « double puits » fait référence aux situations dans lesquelles on trouve deux puits de potentiels suffisamment proches pour qu'il soit possible de passer de l'un à l'autre par effet tunnel. Dans les molécules chimiques les distances interatomiques sont de l'ordre de l'angström et les énergies de l'ordre de l'électronvolt ce qui rend l'électron susceptible à l'effet tunnel.

On considère l'ion H_2^+ , constitué d'un électron et deux protons. Le potentiel auquel est soumis l'électron correspond à l'ajout des potentiels de chaque proton.

Autre système du même type, la molécule d'ammoniac de géométrie pyramide trigonale est formée d'un atome d'azote et de trois noyaux d'hydrogène qui forment un plan. On peut décrire des vibrations de la molécule comme le déplacement de ce plan par rapport à l'atome d'azote.

To-Do Faire les dessins [10].

On s'intéresse donc au double puits dont la barrière, de hauteur V_0 et largeur Δ , sépare les deux puits de largeur a .

1.2 Fonction d'onde

On étudie la situation où l'énergie E du système (la particule, qui est l'électron ou les trois hydrogènes), est inférieure à V_0 . Comme d'habitude pour ce genre de problèmes on divise l'espace en régions que l'on nommera G , M et D et on définit :

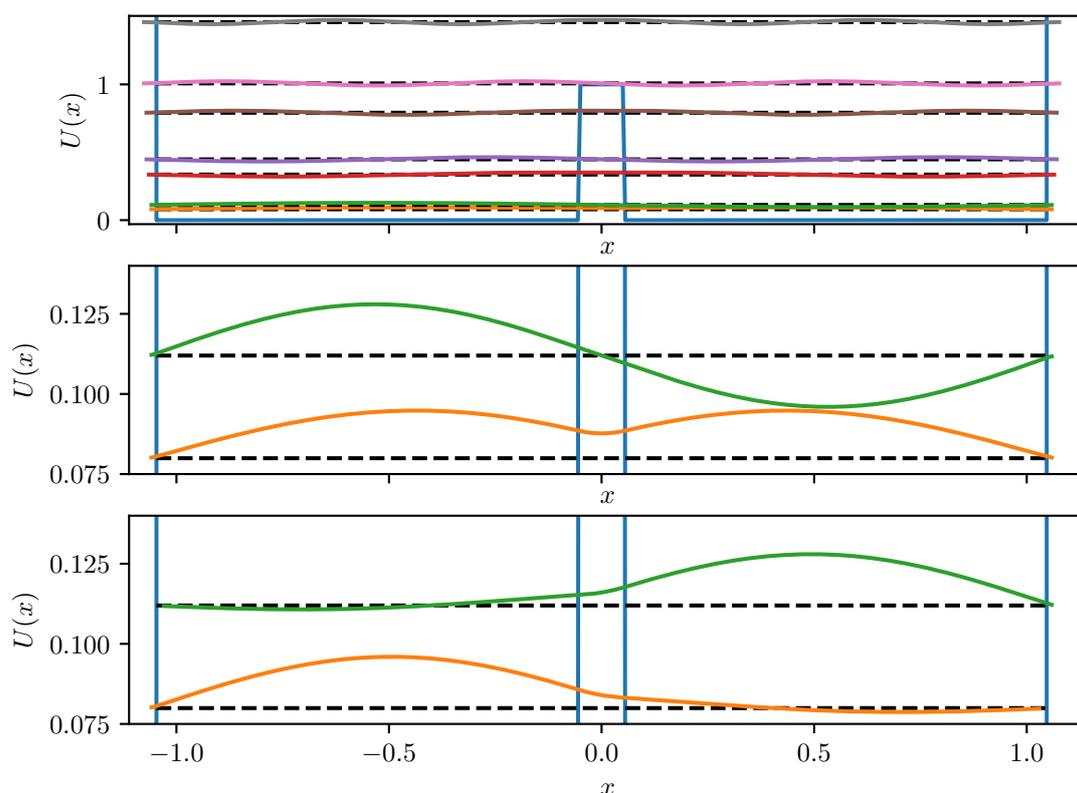
$$k = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad \text{et} \quad \kappa = \sqrt{\frac{2m(E - V_0)}{\hbar^2}}$$

où m est la masse du système. On impose les conditions aux limites nulles, $\varphi(x = \pm(a + \Delta/2)) = 0$.

En résolvant l'équation de SCHRÖDINGER stationnaires on trouve deux classes de fonctions d'ondes propres : des solutions symétriques φ_s et des solutions antisymétriques φ_a .

$$\varphi_s(x) = \begin{cases} A \sin(k(a + \frac{\Delta}{2} + x)) & \text{dans } G \\ B \cosh(k(a + \frac{\Delta}{2} + x)) & \text{dans } M \\ A \sin(k(a + \frac{\Delta}{2} + x)) & \text{dans } D \end{cases}$$

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} -A \sin(k(a + \frac{\Delta}{2} + x)) & \text{dans } G \\ B \sinh(k(a + \frac{\Delta}{2} + x)) & \text{dans } M \\ A \sin(k(a + \frac{\Delta}{2} + x)) & \text{dans } D \end{cases}$$



On constate que dans les états stationnaires, la particule a la même probabilité d'être mesurée à gauche ou à droite. On remarque aussi que : $\psi_s + \psi_a \equiv \psi_g$ correspond à un état

où la particule est à gauche, alors que $\psi_s - \psi_a \equiv \psi_d$ correspond à un état où la particule est à droite. Ces deux états, ψ_g et ψ_d semblent plus « raisonnables » alors qu'ils ne sont pas des états propres. Rappelons que comme l'équation de SCHRÖDINGER est linéaire alors toute combinaison linéaire de solutions est une solution : on peut décrire le système aussi bien avec un couple qu'avec l'autre.

Pour ne pas perdre de généralités en le décrivant avec ψ_g et ψ_d on doit toutefois s'assurer que ces deux états forment une base si possible orthonormée, comme ψ_s et ψ_a le font. Les deux calculs $\langle \psi_d | \psi_d \rangle = \int \psi_d \psi_d^*$ et $\langle \psi_g | \psi_g \rangle = \int \psi_g \psi_g^*$ donnent tous les deux 2. Le calcul $\langle \psi_g | \psi_d \rangle = \int \psi_g \psi_d^*$ donne 0. Les deux fonctions d'onde sont orthogonales mais pas normées : on pourrait plutôt choisir $\psi_g \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_g$ et $\psi_d \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\psi_d$, mais cela à très peu d'importance pour la suite.

1.3 Niveaux d'énergie

La continuité de la fonction d'onde permet de calculer les valeurs des énergies E_s et E_a associées aux deux états stationnaires, et sous certaines approximations [10] on trouve des expressions littérales.

1.4 Évolution temporelle

2. La molécule d'ammoniac dans un champ électrique

3. Couplage avec le champ

4. Hamiltonien et niveaux d'énergie

LP 44 : Capacités thermiques : description, interprétations microscopiques

Niveau L3

Prérequis Thermodynamique Physique statistique Notions de mécanique quantique

Dans le cours de thermodynamique nous introduisons la capacité thermique C_P (resp. C_V) isobare (resp. isochore). Elle sert de lien entre la quantité d'énergie échangée par le système avec l'extérieur et la variation de sa température lors d'une transformation isobare : $\Delta H = C_P \Delta T$. On définit également des grandeurs massiques, volumiques, molaires... Cette grandeur est introduite sans justification et souvent présentée comme indépendante de la température. Dans cette leçon, nous allons chercher une origine microscopique à la capacité thermique ainsi qu'un modèle qui rend compte de ses variations éventuelles. La discussion nous mènera vers l'un des tests historiques de la mécanique quantique.

1. Généralités

1.1 Définitions

To-Do Trouver quoi dire d'introductif : soit une description en physique stat, soit un exemple avec de l'eau soit ?

1.2 Théorème de l'équipartition de l'énergie

To-Do Le théorème ne doit-il pas être en prérequis ?

On rappelle dans cette leçon le théorème d'équipartition de l'énergie qui va nous être utile. « Pour un système classique, chaque terme quadratique de l'hamiltonien va contribuer pour $\frac{1}{2}k_B T$ dans l'énergie moyenne du système ».

Le résultat vient simplement du calcul d'intégrale :

$$\langle E \rangle = \frac{\int ax^2 e^{-\beta ax^2} dx}{\int e^{-\beta ax^2} dx} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\beta^3 a}}}{\sqrt{\frac{\pi}{\beta a}}} = \frac{1}{2\beta} = \frac{1}{2} k_B T$$

Notons qu'il est valable indépendamment pour chaque terme quadratique même dans les cas où d'autres termes sont présents.

2. Gaz parfaits

2.1 Gaz parfait monoatomique

Pour un gaz parfait monoatomique, les particules sont indépendantes. Si l'on néglige les énergies autre que cinétiques alors le hamiltonien pour une particule s'écrit :

$$h = \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2)$$

il contient uniquement des termes quadratiques au nombre de 3. Pour tout le système : $H = Nh$. L'application du théorème d'équipartition nous donne directement :

$$\langle E \rangle = \frac{3}{2}Nk_B T \implies C_V = \frac{3}{2}Nk_B \quad \text{d'où} \quad c_V = \frac{3}{2}N_A k_B \approx 12,5 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Dans le Handbook [45] c'est les valeurs de c_P qui sont tabulées. On cherche alors à exprimer cette grandeur déjà définie dans le cours de thermodynamique, rappelons :

$$\Delta h = \Delta u + \Delta(Pv) = \Delta u + N_A k_B \Delta T$$

d'où :

$$c_P = c_V + N_A k_B = \frac{5}{2}N_A k_B \approx 20,79 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

Comparons :

Gaz	T (K)	c_P (J mol ⁻¹ K ⁻¹) [45] [54]
Argon Ar	300	20,79
Helium He	300	20,79
Carbone C	500	20,82
Silicium Si	3600	23,05
Hydrogène H ₂	300	28,84
Azote N ₂	300	29,12
Dioxygène O ₂	300	29,38
Fluore F ₂	300	31,30
Dichlore Cl ₂	300	33,90

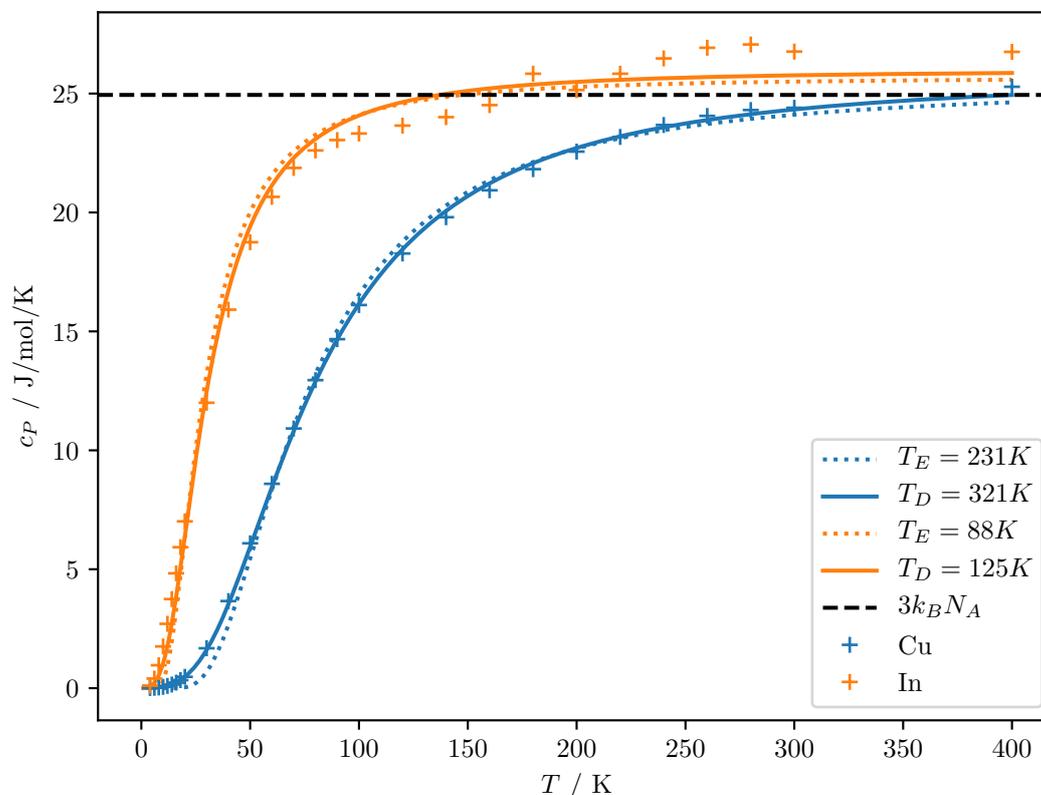
On constate un bon accord des valeurs expérimentales avec notre modèle uniquement pour les gaz monoatomiques.

2.2 Autres gaz parfaits

To-Do Faire un tableau qui récapitule tout !

3. Solides cristallins

3.1 Résultats expérimentaux [13]



L'expérience montre que pour les solides à température ambiante et au delà la capacité thermique molaire s'approche d'une constante : $25 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$ c'est la loi de DULONG-PETIT.

À très basse température, vers 0 K, la capacité thermique tends vers 0 et les données sont le mieux ajustées par une courbe en T^3 .

NOTES Il semble qu'il y ait une raison théorique au fait que la limite soit zéro en zéro : principe de NERNST ?

3.2 Modèle classique

Dans un solide on modélise les noeuds du réseau comme des particules indépendantes de masse m , liées à une position d'équilibre par une force de rappel. À cette force on associe l'énergie potentielle $e_p = \frac{1}{2}kr^2$. L'hamiltonien pour une particule s'écrit : $h = \frac{1}{2}\mathbf{p}^2 + \frac{1}{2}k\mathbf{r}^2$: il contient uniquement des termes quadratiques au nombre de 6 pour un système à trois dimensions. Pour tout le système : $H = Nh$.

Le théorème d'équipartition s'applique et on obtient : $\langle E \rangle = 3Nk_B T$, d'où $C_P = 3Nk_B$ et la grandeur molaire $c_P = 3N_A k_B \approx 25 \text{ J mol}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

3.3 Modèle d'EINSTEIN (1907) [25]

EINSTEIN reprend le modèle présenté précédemment (oscillateurs harmoniques indépendants) mais y introduit une quantification des niveaux d'énergie dans le cadre d'une mécanique quantique naissante.

Pour un oscillateur harmonique quantique à une dimension l'énergie mécanique de pulsation $\omega = k/m$ est : $e = \hbar\omega(n + \frac{1}{2})$, $n \in \mathbb{N}$.

NOTES

[43] Concernant la pulsation, on peut en déduire un ordre de grandeur en interprétant le module de YOUNG $Y = 20 \times 10^{10} \text{ N m}^{-2}$ microscopiquement, comme $F = \frac{\Delta l}{l} Y = k\Delta l$, avec $l = 3 \times 10^{-10} \text{ m}$ (densité $2,5 \times 10^{19} \text{ m}^{-3}$) alors : $\omega = \sqrt{k/m} = 1,7 \times 10^{13} \text{ Hz}$.

Ici, le théorème d'équipartition ne s'applique pas, mais la physique statistique va permettre de calculer l'énergie moyenne. La fonction de partition z pour un noeud du réseau s'écrit :

$$\begin{aligned} z &= \sum_{n_x, n_y, n_z} e^{-\beta\hbar\omega[(n_x + \frac{1}{2}) + (n_y + \frac{1}{2}) + (n_z + \frac{1}{2})]} \\ &= \left(\sum_n e^{-\beta\hbar\omega(\frac{1}{2} + n)} \right)^3 \\ &= \left(\frac{1}{2 \sinh(\frac{\beta\hbar\omega}{2})} \right)^3 \\ &= \left(\frac{1}{2 \sinh(\frac{T_E}{2T})} \right)^3 \end{aligned}$$

dans l'argument du sinus hyperbolique on nomme température d'EINSTEIN T_E la quantité $\hbar\omega/k_B$ homogène à une température, qui ne dépend que de ω la pulsation des oscillateurs harmoniques ; elle nous sert pour le moment à raccourcir les écritures. Pour l'ensemble du système, $Z = z^N$. L'énergie moyenne est :

$$\langle E \rangle = \sum_{n_x, n_y, n_z} E_{n_x, n_y, n_z} P_{n_x, n_y, n_z} = -\frac{\partial \ln(Z)}{\partial \beta} = \frac{3N\hbar\omega}{2} \coth\left(\frac{T_E}{2T}\right)$$

Alors la capacité thermique $C_P = \frac{\partial \langle E \rangle}{\partial T}$ s'écrit :

$$C_P = \frac{3N\hbar\omega T_E}{4T^2} \frac{1}{\sinh^2(\frac{T_E}{2T})} = \frac{3N}{4} \left(\frac{T_E}{T}\right)^2 \frac{1}{\sinh^2(\frac{T_E}{2T})}$$

On peut comparer l'allure de cette fonction de T aux données expérimentales. On constate que l'on retrouve la loi de DULONG-PETIT aux hautes températures et une limite vers 0 aux basses températures mais avec une approche un peu trop horizontale en effet, le modèle prévoit :

$$C_P \approx \frac{3N}{4} \left(\frac{T_E}{T}\right)^2 e^{-\frac{T_E}{2T}} \quad \text{à } T \ll T_E$$

Outre l'écart à l'expérience, c'est surtout l'hypothèse discutable de l'indépendance des oscillateurs harmoniques qui entraîna DEBYE à proposer un autre modèle.

3.4 Modèle de DEBYE () [25]

To-Do Bien lire [25, III.E.III.2] pour pouvoir discuter de ce modèle.

LP 45 : Paramagnétisme, ferromagnétisme : approximation du champ moyen

Niveau L3

Prérequis Magnétostatique Facteur de BOLTZMANN Moment magnétique, cinétique orbital, et spin de l'électron

Dans le cours de magnétostatique, nous étudions les champs magnétiques générés par des courants électriques et leurs interactions avec la matière aimantée. On associe à un milieu une quantité vectorielle \mathbf{M} , l'aimantation, liée au champ magnétique \mathbf{H} par $\mathbf{M} = \chi_m \cdot \mathbf{H}$ sans en expliciter l'origine. C'est ce que nous allons faire dans cette leçon.

1. Approche microscopique du magnétisme

1.1 Moment magnétique atomique [63]

C'est Paul LANGEVIN qui, en 1905, introduit l'hypothèse selon laquelle l'aimantation de la matière est due à la contribution microscopique de chaque atome qui la compose mais il n'en propose pas d'origine. Le modèle de BOHR (1913) et la mécanique quantique ont fait avancer l'idée de LANGEVIN.

On rappelle que pour un électron dans un atome, la projection du moment cinétique total \mathbf{J} (orbital \mathbf{L} et spin \mathbf{S}) selon un axe quelconque (ici Oz) est un multiple entier ou demi-entier de \hbar : $J_z = m_j \hbar$. Il est lié au moment magnétique total $\boldsymbol{\mu}$ par le facteur de LANDÉ g et le magnéton de BOHR $\mu_B = q\hbar/2m_e = 9,27 \times 10^{-24} \text{ J T}^{-1}$ de sorte que sa projection soit :

$$\mu_z = -m_j g \mu_B$$

La moment magnétique de l'atome correspond à la somme des moments magnétiques de chacun de ses électrons, il en va de même pour la projection. En particulier, dans une sous-couche électronique complète, où tous les électrons sont appariés, en raison du principe d'exclusion de PAULI, la somme des moments magnétiques est nulle. Cela implique que :

- seuls les électrons de valence vont importer dans les calculs,
- les éléments dont toutes les sous-couches sont pleines ne sont pas magnétiques (cf [50, p.94, chap. 3.1.6, table 3.1]).

Pour les espèces chimiques moléculaires (O_2 , H_2O , ...) on regarde de la même manière les nombres d'électrons appariés ou non. Le cas d'étude le plus simple est alors celui où il n'y a qu'un seul électron non apparié : $j = \frac{1}{2}$, $m_j = s = \pm \frac{1}{2}$.

1.2 Aimantation résultante

Dans ce cadre, l'aimantation \mathbf{M} d'un échantillon est une propriété intrinsèque du milieu et s'écrit :

$$\mathbf{M} = \frac{1}{V} \sum_i \boldsymbol{\mu}_i = \frac{N}{V} \langle \boldsymbol{\mu} \rangle = n \langle \boldsymbol{\mu} \rangle$$

De la physique statistique, il semble raisonnable d'avancer que pour un milieu isolé de toutes interactions mais soumis à l'agitation thermique, et dans un modèle sans couplage, chaque atome va posséder un moment magnétique $\boldsymbol{\mu} \neq \mathbf{0}$ et pour autant, $\mathbf{M} = \mathbf{0}$.

2. Paramagnétisme

L'adjectif *paramagnétique* désigne les milieux qui n'ont pas aimantation naturelle, mais en acquièrent lorsqu'ils sont placés dans un champ magnétique. L'énergie d'interaction entre un moment magnétique $\boldsymbol{\mu}$ et le champ magnétique \mathbf{B} est donnée par le produit scalaire :

$$E_{\pm} = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = sg\mu_B B = \mp \frac{1}{2} g\mu_B B = \mp E_B$$

Nous verrons que cette énergie est à l'origine du paramagnétisme.

2.1 Aimantation en présence d'un champ [63]

Reprenons l'énergie potentielle d'interaction entre un moment magnétique et un champ extérieur pour une particule de spin $\pm \frac{1}{2}$:

$$E_{\pm} = \mp E_B$$

Nous négligeons les interactions entre les différents électrons et entre les différents atomes. De bons exemples de matériaux correspondant à cette description sont les complexes du cuivre $\text{Cu}^{2+}(\text{II})$. La configuration électronique du cuivre étant $[\text{Ar}]4s^13d^{10}$ (exception à la règle de HUND), on s'attend en effet à un électron non apparié pour l'ion $2+$ avec la configuration $[\text{Ar}]4s^03d^9$. Complexés, les ions de cuivre sont éloignés les uns des autres par les ligands de sorte que les interactions magnétiques entre eux soient négligeables.

MÉDIA <https://www.adichemistry.com/jee/qb/chemical-bond/1/q1-1.png>

Chaque électron, associé à un atome et à ses nombres quantiques, est discernable des autres électrons. La distribution de MAXWELL-BOLTZMANN donne alors la probabilité qu'un moment magnétique donné ait une énergie E_{\pm} :

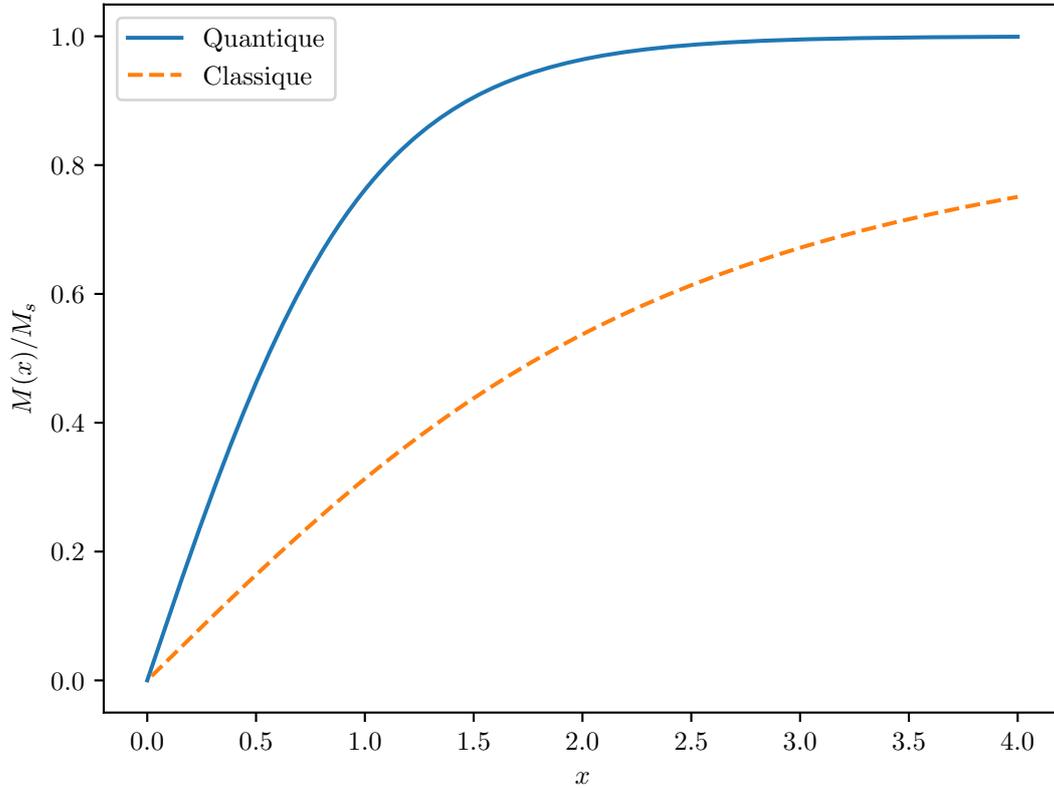
$$P_{\pm} = \frac{e^{-\beta E_{\pm}}}{Z} \quad \text{avec} \quad Z = e^{-\beta E_+} + e^{-\beta E_-} = 2 \cosh(\beta E_B)$$

on en déduit la valeur moyenne de μ_z , et donc $M = \|\mathbf{M}\| = \mathbf{M} \cdot \mathbf{e}_z$:

$$\begin{aligned} M &= n \sum_{i=\pm} \frac{ig\mu_B}{2} \cdot P_i = \frac{ng\mu_B}{2} \frac{(e^{\beta E_B} - e^{-\beta E_B})}{2 \cosh(\beta E_B)} = \frac{ng\mu_B}{2} \tanh(\beta E_B) \\ &= \frac{ng\mu_B}{2} \tanh\left(\frac{g\mu_B B}{2k_B T}\right) \\ &= M_s \tanh(x) \end{aligned}$$

La dépendance en $\frac{B}{T}$ nous intéresse : les autres valeurs sont soit des constantes fondamentales soit liées au milieu.

Le même calcul, avec une description classique du moment magnétique aurait donné un résultat similaire, avec la fonction de LANGEVIN : $M(x) = M_s \mathcal{L}(x)$; la description classique sous estime la valeur de M .



2.1.1 Champ fort, basse température

À $x \gg 1 \implies \mu_B B \gg k_B T$ ($\tanh(x) \approx 1$), l'aimantation atteint une valeur de saturation :

$$M\left(\frac{B}{T}\right) = M_s$$

elle est atteinte lorsque tous les moments magnétiques atomiques sont orientés dans le même sens que \mathbf{B} avec $s = -\frac{1}{2}$. Cette configuration correspond à la configuration d'énergie potentielle minimale des spins dans le champ appliqué.

2.1.2 Champ faible, haute température

À $x \ll 1 \implies \mu_B B \ll k_B T$, un développement limité ($\tanh(x) \approx x$) donne :

$$M\left(\frac{B}{T}\right) = M_s \frac{g m \mu_B B}{2 k_B T} = \frac{n g^2 \mu_B^2 B}{4 k_B T}$$

on définit la susceptibilité magnétique :

$$\chi_m \equiv \mu_0 \frac{\partial M\left(\frac{B}{T}\right)}{\partial B} = \frac{C}{T} \propto \frac{1}{T}$$

qui se trouve être proportionnelle à l'inverse de la température. Le résultat de proportionnalité a été annoncé par Pierre CURIE déjà en 1885 suite à des observations expérimentales en magnétostatique. La constante C propre à chaque milieu est appelée constante de CURIE.

L'écriture $M(\frac{B}{T}) = C\frac{B}{T}$ rend compte d'une compétition entre l'agitation thermique et l'alignement magnétique. Notons que dans le cas des champs forts $\chi_m = 0$ n'a pas d'intérêt. La susceptibilité magnétique donne, dans la matière, le lien entre M , H et B :

$$M = \chi_m H \quad B = \mu_0(H + M) = \mu_0(1 + \chi_m)H$$

2.2 Énergie et entropie [25]

NOTES

Cette section présente peu d'intérêt si l'on ne discute pas la désaimantation adiabatique.

Puisque l'on prétend voir une compétition entre deux paramètres physiques vis à vis de l'orientation de l'ensemble des spins, l'expression de l'entropie du système pourra nous renseigner plus quantitativement. Pour la calculer, nous allons utiliser :

$$s = \frac{e - f}{T}$$

Énergie volumique e L'énergie volumique moyenne d'un échantillon est donnée par (nous avons déjà fait ce calcul au préfacteur $-B$ près) :

$$e = \sum_{i=\pm} E_i P_i = \sum_{i=\pm} \frac{-ig\mu_B}{2} B P_i = -M(\frac{B}{T})B = -\frac{ng\mu_B}{2} \tanh\left(\frac{g\mu_B B}{2k_B T}\right)B$$

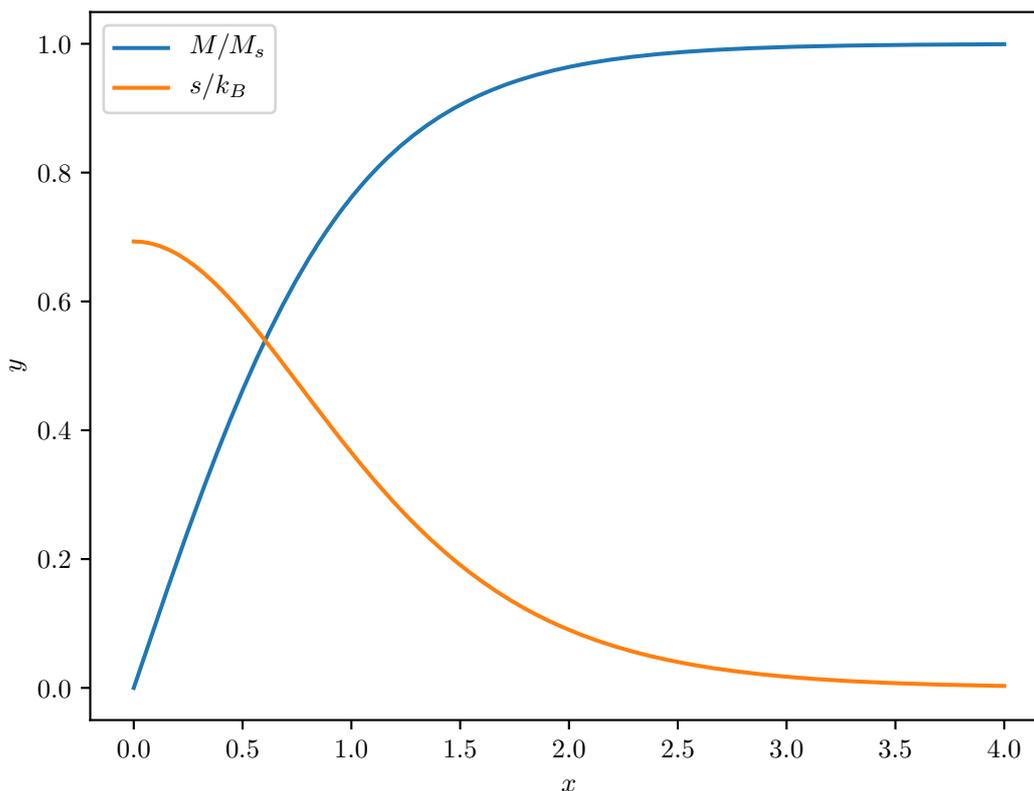
Énergie libre volumique f L'énergie libre volumique est :

$$f = -k_B T \ln Z = -k_B T \ln(2 \cosh(\beta E_B)) = -k_B T \ln\left(2 \cosh\left(\frac{g\mu_B B}{2k_B T}\right)\right)$$

Entropie volumique D'où l'entropie volumique :

$$s = \frac{e - f}{T} \implies \frac{s}{k_B} = -x \tanh(x) + x \ln(2 \cosh(x)) = f\left(\frac{B}{T}\right)$$

qui ne dépend que de $\frac{B}{T}$.



Le graphe montre que :

- à $\frac{B}{T} \propto x \gg 1$, s tends vers 0 : ce qui est cohérent avec l'idée que, à température basse ou champ fort, tous les moment magnétiques pointent dans la même direction.
- à $\frac{B}{T} \propto x \ll 1$, s tends vers un maximum : les moments magnétiques sont désordonnés.

MÉDIA `./python/ferro_para_anim.py`

2.3 Valeurs numériques et applications

2.3.1 Sonder les orbitales électroniques

Puisque tout notre travail repose sur l'hypothèse qu'il y a un seul électron non apparié par atome dans le matériaux considéré, un écart entre le modèle et l'expérience pourrait indiquer que notre hypothèse est mauvaise.

Dioxygène La structure de LEWIS du dioxygène ne prévoit aucun électron non apparié. Pourtant, l'expérience montre que le dioxygène est paramagnétique. (Ce phénomène est bien modélisé par la théorie des orbitales moléculaires.)

MÉDIA <https://www.youtube.com/watch?v=Lt4P6ctf06Q>

Lanthanides Pour d'autres ions que le cuivre (II), on observe un désaccord entre les constantes de CURIE théoriques et expérimentales, qui peut s'expliquer par des exceptions

à la règle de HUND.

Ion (aq)	Configuration	$C_{\text{théo}}/C_{\text{exp}}$ [36]	χ_m [36]
Ce ³⁺	$5s^25p^64f^1$	1,058	$1,23 \times 10^{-6}$
Pr ³⁺	$5s^25p^64f^2$	1,046	$2,61 \times 10^{-6}$
Sm ³⁺	$5s^25p^64f^5 \rightarrow 5p^64f^7$	0,321	$4,79 \times 10^{-7}$
Eu ³⁺	$5s^25p^64f^6 \rightarrow 5s^15p^64f^7$	0	$2,46 \times 10^{-6}$

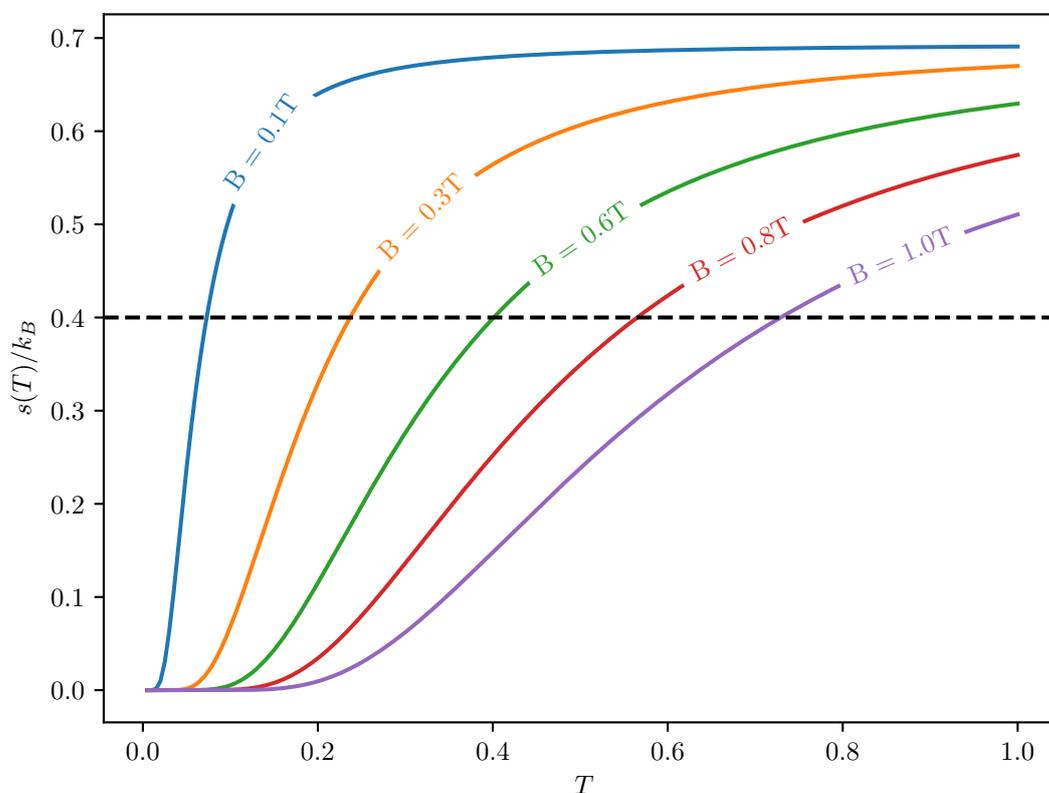
2.3.2 Matériaux étudiés et courants

Matériau	χ_m [45]
O ₂ (l)	$3,06 \times 10^{-3}$
Cu(SO ₄), ₅ H ₂ O	$1,69 \times 10^{-4}$
Al(s)	$2,07 \times 10^{-5}$
Eau	$-9,12 \times 10^{-6}$

Pour l'eau, comme pour d'autres substances, la valeur de χ_m est négative. C'est le cas de tous les milieux dans lesquels tous les électrons sont appariés : on parle de milieux *diamagnétiques*.

2.3.3 Refroidissement par désaimantation adiabatique

To-Do Dire des choses dans cette section.



3. Ferromagnétisme

L'adjectif *ferromagnétique* désigne les matériaux qui ont une aimantation naturelle. Dans le cadre de la description précédente, cela revient à dire que, en fait, $\langle \boldsymbol{\mu} \rangle \neq \mathbf{0}$ et donc, que l'orientation des moments magnétiques atomiques n'est *pas complètement* aléatoire : le couplage n'est pas négligeable alors comment le modéliser ?

3.1 Origine du couplage

3.1.1 L'interaction dipolaire est trop faible [63] [25, III. J. I. 4]

La première hypothèse que nous pouvons faire est la suivante : « le couplage est dû à l'interaction dipolaire entre les moments magnétiques ». Un calcul en ordre de grandeur permet de la vérifier : soient deux moment dipolaires atomiques $\boldsymbol{\mu}_i$ et $\boldsymbol{\mu}_j$ distants de r l'énergie d'interaction entre les dipôles est :

$$E_d = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\boldsymbol{\mu}_i \cdot \boldsymbol{\mu}_j - 3(\boldsymbol{\mu}_i \cdot \mathbf{e}_r)(\boldsymbol{\mu}_j \cdot \mathbf{e}_r)}{r^3} \propto \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mu_B^2}{(1 \text{ \AA})^3} \approx 54 \text{ \mu eV} \ll 25 \text{ meV} = k_B T$$

Or le ferromagnétisme est observé à température ambiante.

3.1.2 Hamiltonien de HEISENBERG [25]

Pour modéliser l'interaction, HEISENBERG propose une description simple : à chaque couple de moments magnétiques voisins il associe une énergie qui tend à les aligner :

$$E_{ij} = -J(\boldsymbol{\mu}_i \cdot \boldsymbol{\mu}_j)$$

en supposant J suffisamment important. Ce coefficient est appelé *coefficient de couplage* il est positif.

Dans ce modèle modifié, l'énergie E_i d'un moment magnétique $\boldsymbol{\mu}_i$ au coeur du matériaux en présence d'un champ \mathbf{B} va alors s'écrire :

$$E_i = -\boldsymbol{\mu}_i \cdot \left(\mathbf{B} + J \sum_{j \in v(i)} \boldsymbol{\mu}_j \right)$$

La résolution du problème se fait alors de la même manière que ce que nous avons fait pour le paramagnétisme. Seulement ici, le couplage rend la résolution beaucoup plus compliquée. . . Il convient alors de trouver une approximation du problème.

Ce couplage est d'origine quantique et électrostatique. Si dans un réseau on considère deux électrons de valence associés à la fonction d'onde $\Psi(1, 2) = f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)g(1, 2)$ produit de f fonction d'onde orbitale et g fonction d'onde de spin. Cette fonction d'onde doit être antisymétrique ($\Psi(1, 2) = -\Psi(2, 1)$) alors, si les électrons sont de spin parallèles : $g(1, 2) = g(2, 1) \implies f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = -f(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ la densité de probabilité de présence ($|f|^2$) s'annule lorsque les électrons sont au même endroit. Au contraire, si les électrons sont de spin opposés : $g(1, 2) = -g(2, 1) \implies f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = f(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}_1)$ la densité de probabilité de présence ($|f|^2$) prend une valeur maximale lorsque les électrons sont au même endroit : l'énergie d'interaction coulombienne entre ces deux électrons (plutôt rapprochés) est grande, alors qu'elle était faible pour les électrons de spins opposés.

3.2 Approximation de champ moyen [25, III.J.2.1]

L'approximation de champ moyen consiste à faire comme si le terme de droite n'était pas soumis aux fluctuations concrètement, on le remplace par sa valeur moyenne avec :

$$\left\langle \sum_{j \in v(i)} \mu_j \right\rangle = p \langle \mu \rangle = p \frac{M}{n}$$

alors,

$$E_i = -\mu_i \left(\mathbf{B} + \frac{Jp}{n} \mathbf{M} \right) \equiv -\mu_i \mathbf{B}_{\text{eff}}$$

Dans notre modèle les moments magnétiques plus proches voisins ne sont pas indépendants mais l'interaction est ici cachée dans \mathbf{M} . Tout se passe comme si le milieu était paramagnétique avec un champ appliqué \mathbf{B}_{eff} . Nous pouvons alors reprendre l'équation du paramagnétisme pour l'aimantation :

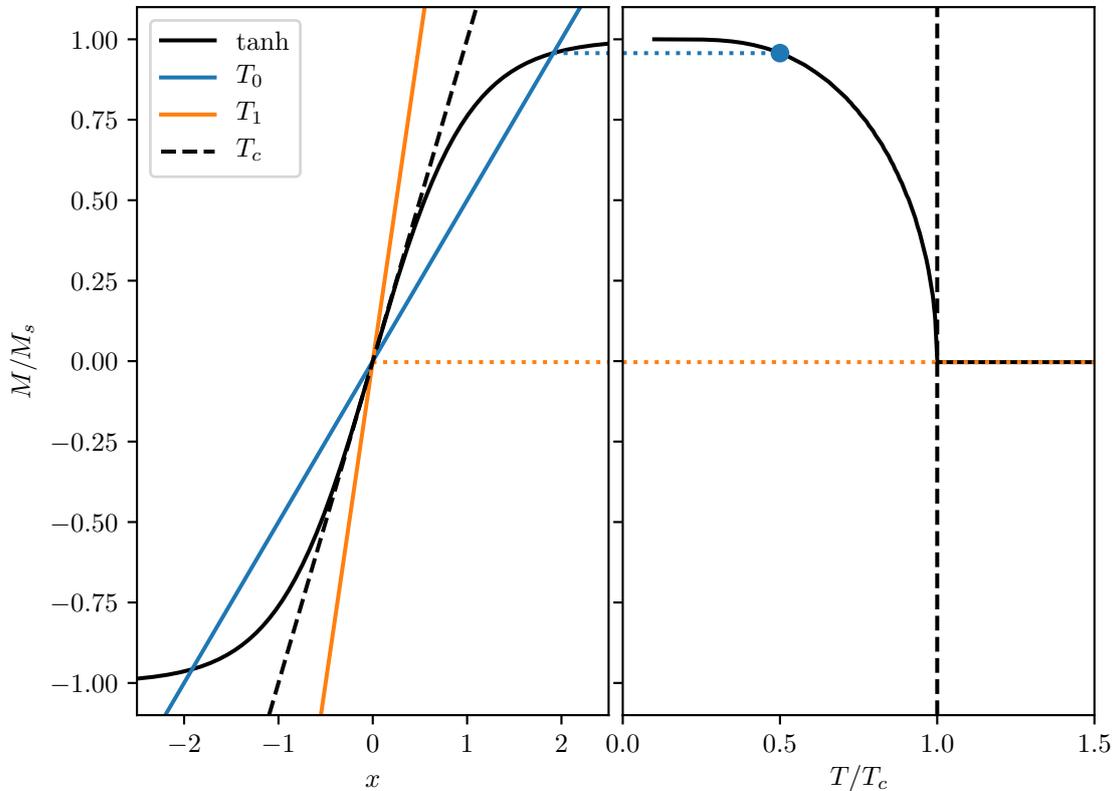
$$M\left(\frac{B_{\text{eff}}}{T}\right) = M_s \tanh(x_{\text{eff}})$$

sans oublier que :

$$x_{\text{eff}} = f(M) \implies M = \frac{n}{Jp} \left(\frac{2k_B T x_{\text{eff}}}{g\mu_B} - B \right)$$

ce genre d'équations dite *d'autocohérence* s'étudie graphiquement, on cherche les intersections entre la droite d'équation $M = f(x_{\text{eff}})$ et le graphe de la fonction $M = M_s \tanh(x_{\text{eff}})$

$$B = 0$$



To-Do Tracer l'autre branche.

3.3 Résultats

3.3.1 Température de CURIE

On constate que, à $B = 0$ l'équation d'autocohérence a toujours une solution en $x_{\text{eff}} = 0$ et a, pour les températures $T < T_C$ deux solutions supplémentaires. Nous pouvons déterminer la température critique T_C en déterminant la pente de $M_s \tanh(x_{\text{eff}})$ à l'origine : l'un des développement limité précédents donne :

$$\left. \frac{\partial M}{\partial x_{\text{eff}}} \right|_{x_{\text{eff}}=0} = M_s = \frac{ng\mu_B}{2}$$

alors,

$$\frac{n}{Jp} \frac{2k_B T_C}{g\mu_B} = \frac{ng\mu_B}{2} \implies T_C = \frac{g^2 \mu_B^2 Jp}{4k_B}$$

Matériau	M_s [45]	T_C [45]
Fe	22 020	1043
Co	18 170	1388
Ni	6410	627

3.3.2 Aimantation

To-Do Tracer $M = f(B)$, constater la brisure de symétrie.

Tracer $f = f(M)$ pour montrer les positions de stabilité.

3.3.3 ...

To-Do Soit projeter des courbes des différentes grandeurs physiques, soit discuter des limites du modèle, soit discuter de la simulation, soit...

MANIP' ...faire la manip!

Pour aller plus loin

Le paramagnétisme étudié ici est restreint à l'étude de milieux isolants en effet, dans les conducteurs les électrons de conduction se comportent différemment. Le paramagnétisme de PAULI permet de les étudier et tient compte en particulier de leur caractère indiscernable : plutôt que la statistique de MAXWELL-BOLTZMANN on leur applique la statistique de FERMI-DIRAC.

Le paramagnétisme et le ferromagnétisme ne constituent pas l'ensemble des types de matériaux. Nous avons évoqué le diamagnétisme mais il existe aussi l'antiferromagnétisme, et le ferrimagnétisme.

LP 46 : Propriétés macroscopiques des corps ferromagnétiques

1. Approche expérimentale du ferromagnétisme

1.1 Rappels

Au niveau des effets physiques les aimants et les bobines parcourues par des courants sont identiques : on ne peut pas distinguer l'un de l'autre. Cela s'explique par le fait que l'aimantation des matériaux aimantés est associée à la circulation des électrons autour des noyaux.

To-Do Mais tous les matériaux n'ont pas d'aimantation car ...

On rappelle que dans la matière l'équation de MAXWELL-AMPÈRE s'écrit :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} + \mu_0 \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

on appelle *courants de déplacement* la quantité $\mathbf{j}_d = \partial \mathbf{D} / \partial t$, somme de $\mu_0 \partial \mathbf{E} / \partial t$ et des courants de polarisation. Or dans les milieux conducteurs linéaires, $\frac{\|\mathbf{j}_d\|}{\|\mathbf{j}\|} \ll 1$ (ARQS) car :

$$\frac{\|\mathbf{j}_d\|}{\|\mathbf{j}\|} = \frac{\epsilon_0 \omega E}{\sigma E} = \frac{\omega}{\sigma / \epsilon_0}$$

le numérateur correspond à la pulsation « de travail » et le dénominateur est homogène à l'inverse d'un temps. Ce temps est le temps de relaxation des électrons dans le matériaux, de l'ordre de 10^{-14} s. Donc, $\frac{\|\mathbf{j}_d\|}{\|\mathbf{j}\|} \ll 1$ pour des pulsations inférieurs à 10^{14} Hz = 100 THz. Finalement :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \mu_0 \mathbf{j} = \mu_0 (\mathbf{j}_b + \mathbf{j}_f) = \mu_0 \nabla \times \mathbf{M} + \mu_0 \mathbf{j}_f \\ \implies \nabla \times \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) &= \mathbf{j}_f \equiv \nabla \times \mathbf{H} \end{aligned}$$

on appelle *aimantation* la quantité vectorielle telle que $\mathbf{j}_b = \nabla \times \mathbf{M}$.

En tant qu'expérimentateur on ne peut contrôler que les courants libres \mathbf{j}_f portés par les électrons de conduction dans les milieux.

On considère un montage expérimental comme le transformateur : on contrôle \mathbf{j}_f dans le cuivre mais les autres matériaux répondent à la présence de \mathbf{B} de manière à créer \mathbf{j}_b et donc \mathbf{M} .

1.2 Cycle d'hystérésis

NOTES Tracer $M = f(H)$ plutôt que $B = f(H)$ car M sature vraiment.

Cycle, mémoire, champ coercitif, aimantation rémanente, ODG, doux, dur.

1.3 Courbe de première aimantation

Réversibilité, zone linéaire, zone de saturation, perméabilité relative?, ODG

2. Application

2.1 Ferro doux : transformateur

2.2 Ferro durs : disque durs

LP 47 : Mécanismes de la conduction électrique dans les solides

Dans cette leçon nous allons nous intéresser à l'origine microscopique du courant électrique. Nous verrons que l'on peut à partir d'un modèle simple retrouver la loi d'OHM, mais ce modèle sera rapidement mis en défaut par des résultats expérimentaux plus généraux.

1. Modèle classique de la conduction électrique [56]

1.1 Courant et densité de courant

Dès le collège on apprend que le courant électrique est dû à un déplacement de charges portées par des électrons mobiles. Plus formellement, l'intensité i du courant électrique c'est la quantité de charges qui traversent une surface du conducteur par unité de temps. Si l'on suppose que l'ensemble des électrons se déplace à une vitesse moyenne v , alors :

$$i = \frac{n(-e)(Svdt)}{dt} = -neSv$$

En effet, les électrons traversant la surface S entre t et $t + dt$ sont ceux qui à l'instant t se trouvaient dans le volume $Svdt$. On appelle *densité de courant* la quantité surfacique :

$$j = -nev \implies i = \iint_S j dS$$

l'intérêt d'introduire cette grandeur étant de pouvoir étudier des situations où la densité de courant sur une surface n'est pas constante.

To-Do Faire un dessin des électrons qui traversent la section.

On peut rechercher une expression théorique de la densité de courant (en fait ici, de la vitesse moyenne v) en appliquant la mécanique classique aux électrons, on se demande alors quels sont les forces exercées sur ces derniers.

1.2 Hypothèses de DRUDE

1.2.1 Origine des électrons

D'abord il convient de discuter l'origine des électrons présents et libres de se déplacer dans le milieu. Pour un métal, nous supposons que les électrons de valence engagés dans les liaisons métalliques sont très peu liés à leur atome « d'origine » et donc susceptibles de se déplacer sur plusieurs distances interatomiques. Éventuellement, l'ensemble des électrons peut se « décaler » par rapport à l'ensemble des atomes « d'origine ». On distingue ainsi les électrons *de conduction* des électrons *liés*. Les électrons de conduction sont susceptibles de se déplacer au coeur d'un réseau d'ions.

To-Do Faire un petit schéma ou une animation avec les électrons de liaison et les électrons de coeur.

1.2.2 Principe fondamental de la dynamique

Pour mettre en mouvement les électrons, nous appliquons une différence de potentiel U aux extrémités du conducteur. Cette différence de potentiel se traduit dans le milieu par l'existence d'un champ électrique \mathbf{E} . Les électrons étant en mouvement, nous considérons dans un premier temps également l'existence d'un champ magnétique \mathbf{B} .

Si les électrons étaient totalement libres, alors clairement le principe fondamental de la dynamique individuel s'écrirait :

$$m \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = -e(\mathbf{E} + \mathbf{u}_i \times \mathbf{B}) \approx -e\mathbf{E}$$

Les électrons seraient donc animés d'un mouvement rectiligne uniformément accéléré. L'hypothèse d'électrons totalement libres est une hypothèse assez forte, et l'on constate qu'elle mène à un problème : le courant ne devrait cesser d'augmenter.

Mais nous l'avons dit les électrons évoluent dans un réseau d'ions : ils sont donc soumis à des forces électrostatiques et éventuellement des forces de contact. N'oublions pas non plus les interactions inter-électrons.

DRUDE (en 1900), dans le contexte de la découverte des électrons (THOMSON, 1897) propose d'étudier le problème par assimilation à la théorie cinétique des gaz (1800).

Nous supposons que les forces électrostatiques sont peu importantes devant celle exercées par le champ \mathbf{E} extérieur. Concernant les forces de contact c'est à dire les chocs entre les électrons et les ions du réseau ; nous les modéliserons par une force statistique. L'idée est de dire que, en moyenne, les chocs correspondent à des échanges aléatoires de quantité de mouvement. Un électron qui à une vitesse \mathbf{u}'_i juste avant un choc aura une vitesse \mathbf{u}'_i qui en est complètement indépendante juste après le choc. Dans ce cadre nous pouvons dire que chaque électron se comporte comme un électron libre entre les chocs, qui sont en moyenne espacés d'une durée τ . La quantité de mouvement acquise par chaque électrons entre deux chocs s'écrit alors :

$$m(\mathbf{u}_i(t) - \mathbf{u}_i(t - \tau)) = -e\mathbf{E}\tau$$

Tenir compte de l'aspect aléatoire de chaque choc posera problème mais, sur l'ensemble des électrons cette composante de la vitesse va disparaître :

$$\mathbf{v}(t) = \langle \mathbf{u}_i(t) \rangle = \langle \mathbf{u}_i(t - \tau) - \frac{e}{m}\mathbf{E}\tau \rangle = \frac{-e\tau}{m}\mathbf{E}$$

Sous ces hypothèses, l'ensemble des électrons sous l'influence du champ \mathbf{E} est donc accéléré jusqu'à une vitesse limite. Le problème est très analogue à celui de la chute d'un corps dans un fluide visqueux.

1.3 Loi d'OHM locale, loi d'OHM

De la vitesse $v = \|\mathbf{v}\|$, on peut exprimer la densité de courant :

$$\mathbf{j} = -nev = \frac{ne^2\tau}{m}\mathbf{E} \equiv \sigma\mathbf{E}$$

c'est la loi d'OHM locale, σ est la *conductivité électrique*.

On peut calculer l'intensité du courant i à travers le conducteur de surface S et de longueur L :

$$i = \sigma \|\mathbf{E}\|S = \sigma \|\mathbf{-\nabla V}\|S = \sigma \frac{S}{L} U = GU$$

σ est la conductivité, $G = \sigma S/L$ la conductance. Sous une forme plus habituelle, on a trouvé la loi d'OHM :

$$U = \frac{i}{G} = Ri$$

avec une forme connue pour la résistance $R = \rho L/S$ où ρ est la résistivité. On retrouve bien les dépendances attendues vis-à-vis des dimensions géométriques.

Résumons :

$$\mathbf{j} = \frac{ne^2\tau}{m} \mathbf{E}$$

$$U = \frac{L}{S} \frac{m}{ne^2\tau} i$$

1.4 Validation du modèle

1.4.1 Valeur de la conductivité

Pour valider notre modèle, on doit pouvoir donner une valeur à τ , temps moyen entre deux chocs, qui est directement lié au libre parcours moyen l par $v\tau = l$. Il faudra donner une valeur à v .

Il semble raisonnable de prendre pour ordre de grandeur de l la distance inter ions, prenons $l = n^{2/3} \approx 1 \text{ \AA}$.

DRUDE a appliqué la statistique de la théorie cinétique des gaz (MAXWELL-BOLTZMANN) aux électrons de sorte à affirmer, en ordre de grandeur :

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

pour la vitesse moyenne des électrons dans un métal à la température T . Finalement,

$$\sigma = \frac{n^{2/3} e^2}{\sqrt{3k_B T m}}$$

En pratique on tabule plutôt la résistivité $\rho = 1/\sigma$: l'application numérique pour le cuivre donne une valeur de $\rho_{\text{Cu}} = 21 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$, avec la densité $n = 8,47 \times 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ à 273 K. La valeur est à comparer avec la valeur expérimentale : $\rho_{\text{Cu}}^{\text{exp}} = 1,58 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$. En plus, notre modèle prévoit $\rho \propto \sqrt{T}$ or, expérimentalement on constate plutôt $\rho^{\text{exp}} \propto T$.

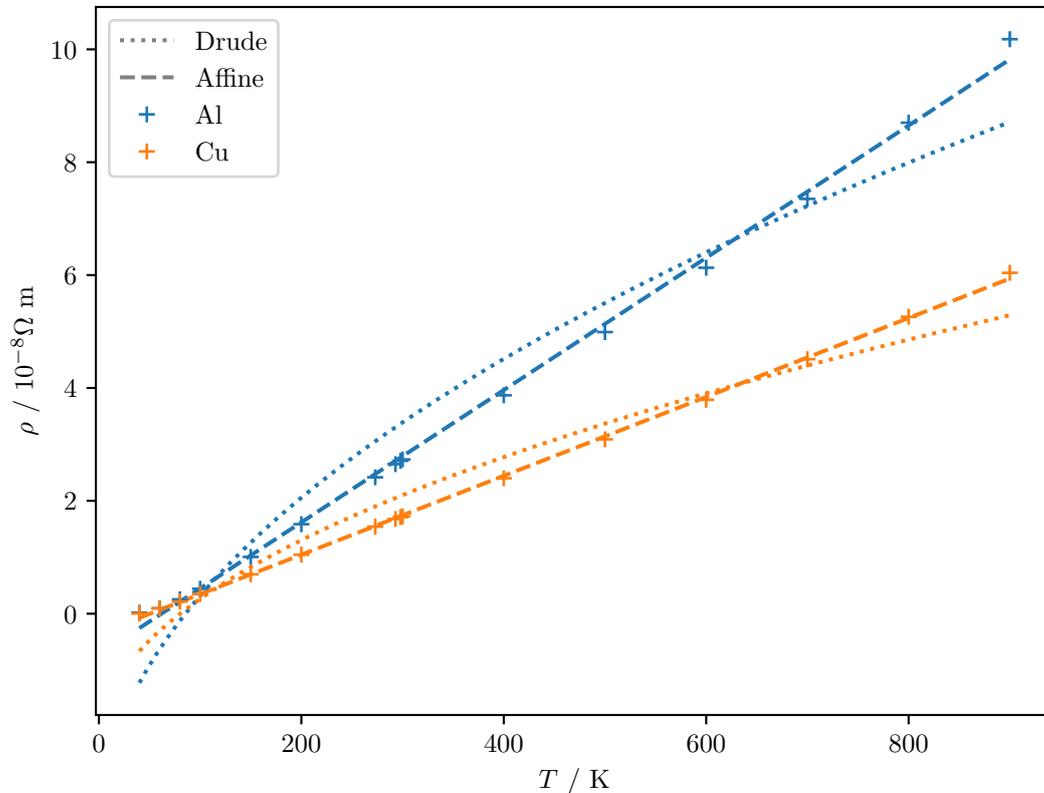
NOTES

En fait [73], la statistique de MAXWELL-BOLTZMANN ne s'applique pas en raison de la nature quantique des électrons. Cette correction au modèle de DRUDE constitue le modèle de SOMMERFELD.

En appliquant la statistique de FERMI-DIRAC pour les fermions on trouve que :

- la vitesse moyenne v ne dépend pas de la température

— le libre parcours moyen est de l'ordre de 300 \AA à température ambiante
la dépendance de la résistivité à la température est linéaire et liée aux impuretés et aux phonons qui traduisent les vibrations du réseau (voir [49, chap. VI]).



1.4.2 Mesure de la densité des porteurs de charge

- PY-DO** On peut imaginer une animation interactive pour expliquer l'effet HALL dans laquelle on peut envoyer les électrons un-à-un. Mais c'est un gros travail...
- MANIP'** Mesure avec l'effet HALL sur un semi-conducteur.
- To-Do** Faire le calcul et bien expliquer l'expérience.
- NOTES** Faire remarquer que les ions du réseau sont eux aussi soumis au champ de HALL, et que c'est ce champ qui donne lieu à la force de LAPLACE.

On constate dans cette expérience que les porteurs de charge sont positifs...

1.4.3 Autres validations

Nous pouvons citer quelque autres problèmes associés à ce modèle [56] :

- Si l'on considère les électrons comme quasi-libres dans le métal alors leur énergie ($\frac{1}{2}mv^2$) doit compter pour $\frac{3}{2}k_B T$ dans l'expression de la capacité thermique c_v du métal. Expérimentalement, on mesure $c_v \propto \frac{6}{2}k_B T$, ce qui correspond uniquement aux ions.
- Nous distinguons les métaux des isolants par le type de liaison chimique engagées entre les atomes mais, nous n'avons aucun moyen de prévoir le comportement d'un

matériaux donné.

To-Do Il faut dire quelque mots sur la conduction en courant alternatif [56].

2. ...

To-Do À décider entre le modèle de SOMMERFELD et la théorie des bandes [56, 49].

Le modèle de SOMMERFELD apporte peu dans cette leçon car il n'explique pas non plus le cas des trous dans les semi-conducteurs.

La théorie des bandes, c'est vite compliqué et on risque de ne pas en dire assez.

LP 48 : Phénomènes de résonance dans différents domaines de la physique

Dans les leçons de mécanique, d'électricité, d'électromagnétisme, nous avons souvent résolu des problèmes qui menaient à la même équation différentielle que nous avons appelée : équation différentielle de l'oscillateur harmonique amorti. En conséquence, même s'il s'agissait de phénomènes physiques différents le comportement du problème vis-à-vis des paramètres qui le décrivaient était le même.

Dans cette leçon, nous allons très rapidement revenir sur cette équation, et les conditions nécessaires pour l'obtenir mais surtout, généraliser les propriétés de ses solutions pour étudier un phénomène particulier : la résonance du système vis-à-vis d'une excitation périodique. La résonance, c'est la valeur particulière de fréquence dans le spectre d'excitation pour laquelle la réponse du système est d'amplitude maximale.

MANIP' Illustrer la résonance avec un système masse-ressort, ou le diapason excité.

1. Oscillateurs harmoniques forcés et amortis

1.1 Présentation des systèmes

Différents systèmes pour lesquels nous avons établi l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique amorti sont :

Système	u	ω_0	τ
Masse-ressort	x	$\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\frac{m}{\alpha}$
RLC série	i	$\sqrt{\frac{1}{LC}}$	$\frac{1}{RC}$
Pendule ammorti	θ	$2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$	$\frac{\alpha}{mL^2}$
Électron élastiquement lié	r	$\sqrt{\frac{n_0 e^2}{m\epsilon_0}}$	$\frac{m}{\alpha}$

Dans tous ces cas, nous trouvons l'équation de l'oscillateur harmonique amorti :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{Q\omega_0} \frac{du}{dt} + u(t) = 0$$

1.2 Régime forcé, réponse harmonique

Telle qu'écrite précédemment l'équation différentielle s'associe à un système qui oscille naturellement. Dans le cadre de ce que l'on appelle « régime forcé », comme sur l'expérience

introductive, l'expérimentateur perturbe le système avec un signal périodique harmonique à la fréquence ω . Dans ce cas, l'étude des systèmes montrerait que le second membre de l'équation n'est plus nul :

$$\frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{Q\omega_0} \frac{du}{dt} + u(t) = U_0 \sin(\omega t)$$

Lorsque l'on étudie la réponse harmonique du système, on cherche des solutions de la forme de la perturbation :

$$u(t) = U \sin(\omega t)$$

L'étude qui va suivre est bien plus simple à mener dans une représentation harmonique avec la notation complexe :

$$\begin{aligned} \underline{u}(\omega) &= \underline{U} e^{i\omega t} \\ -\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \underline{u} + \frac{i}{Q} \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \underline{u} + \underline{u} &= \underline{U_0} e^{i\omega t} \end{aligned}$$

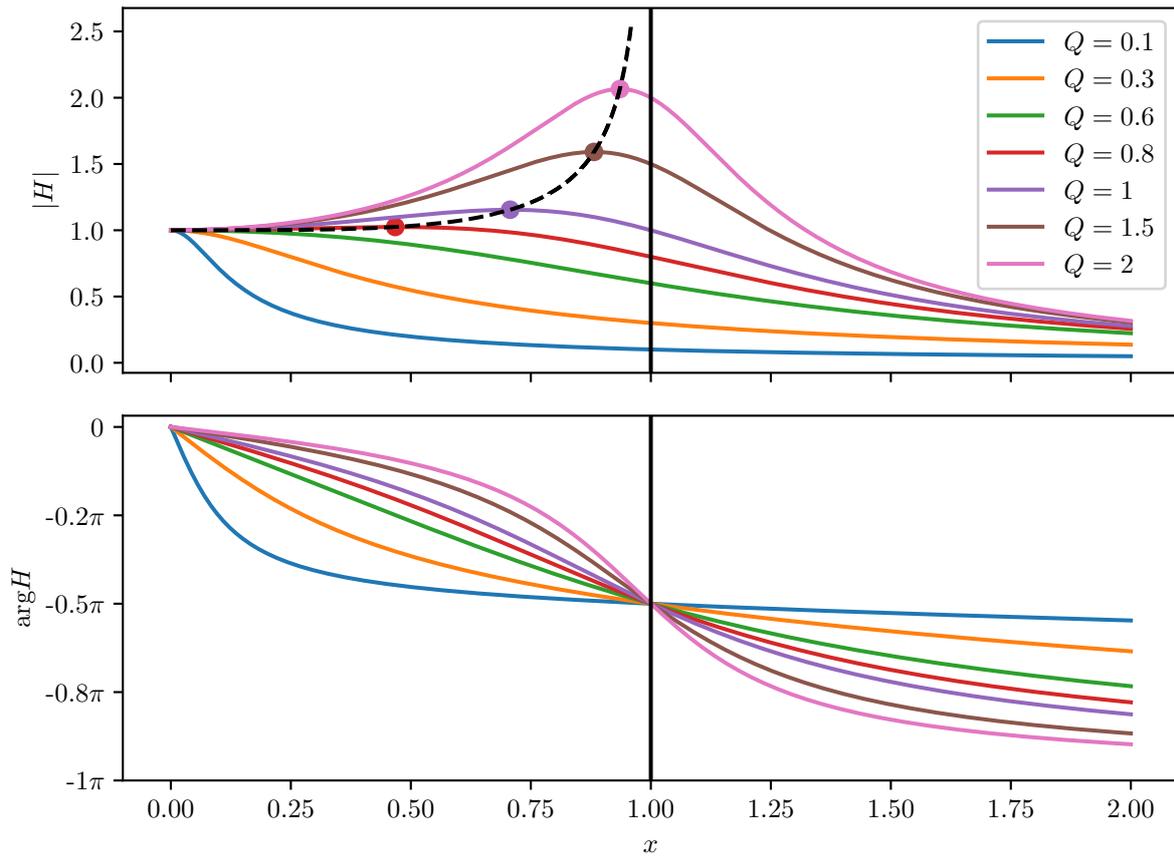
on pose désormais la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$,

$$\begin{aligned} -x^2 \underline{u} + \frac{i}{Q} x \underline{u} + \underline{u} &= \underline{U_0} e^{i\omega t} \implies \underline{U} \left[-x^2 + \frac{i}{Q} x + 1 \right] = \underline{U_0} \\ \implies \underline{H}(x) &\equiv \frac{\underline{U}}{\underline{U_0}} = \frac{1}{1 + \frac{i}{Q} x - x^2} \end{aligned}$$

La dernière égalité nous donne le rapport entre l'amplitude complexe de la réponse du système et l'amplitude complexe de la perturbation périodique, en fonction de la pulsation réduite x et du facteur de qualité Q . On dit que le système se trouve au point de résonance quand le module de ce rapport est maximal.

Le calcul de $\frac{\partial |\underline{H}|}{\partial x}$ montre que pour certaines valeurs du facteur de qualité ($Q < \sqrt{1/2} \approx 0,7$) il n'y a pas de résonance. Le même calcul permet de déterminer la pulsation de résonance : $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - 1/2Q^2}$.

Le calcul de $\arg(\underline{H})$ et le graphe donnent le déphasage de la réponse vis-à-vis de l'impulsion et montrent une particularité à la pulsation propre du système, où les deux signaux sont en quadrature de phase.



Fonction de transfert, diagramme de Bode, conditions de résonance, bien faire le lien entre pulsation propre et pulsation de résonance.

2. Utilisation des phénomènes de résonance

2.1 Transfert d'énergie

Transfert d'énergie optimal entre deux circuits RLC à la même pulsation de résonance. Influence du facteur de qualité.

2.2 Sélection de fréquence

Utilisation du RLC comme passe bande

3. Cavités résonnantes : exemple du Fabry-Perrot

Autre type de résonateur. Étude sous formalisme entrée/sortie. Tracé du diagramme de Bode. Finesse, facteur de qualité. Multiples résonances.

LP 49 : Oscillateurs ; portraits de phase et non-linéarités

NOTES

La physique étant une science expérimentale, on aime bien présenter les expériences *avant* les calculs. Mais dans cette leçon le but est de montrer que l'on peut *prévoir* le comportement des systèmes à partir de calculs simples. On fera parfois les expériences après.

1. Notion sur les portraits de phase : oscillateur harmonique libre

1.1 Le portrait de phase [39]

On considère un oscillateur harmonique classique, l'équation « du mouvement » s'écrit :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

on peut rappeler différentes situations physiques :

Système	x	ω^2
Masse-ressort	position	k/m
Circuit LC	tension u_c	$1/LC$
Pendule simple	angle	g/l

Les solutions sont toujours du type :

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 \cos(\omega t + \varphi) \\ \implies \dot{x}(t) &= -\omega x_0 \sin(\omega t + \varphi)\end{aligned}$$

L'énergie mécanique du système masse ressort s'écrit :

$$\begin{aligned}E &= \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \\ \implies \mathcal{E} &\equiv \frac{2}{m}E = \dot{x}^2 + \omega^2 x^2\end{aligned}$$

On appelle *portrait de phase* le graphe de la fonction $\dot{x} = f(x)$. Les égalités déterminées ci dessus permettent de déterminer que le portrait de phase de l'oscillateur harmonique en régime libre correspond à une ellipse.

To-Do Tracer les deux au tableau, pour différentes énergies (le « rayon » des ellipses).

MANIP' Tracer le portrait de phase du pendule dans les petits angles sur **LatisPro**.

Le portrait de phase nous renseigne graphiquement sur l'évolution temporelle du système à partir de conditions initiales données (paires x_0 et \dot{x}_0). Alors on peut comprendre que plusieurs conditions initiales peuvent mener à la même évolution temporelle.

De manière remarquable on comprend également que si deux courbes se croisent dans le portrait de phase, cela signifie que le système pourrait suivre deux évolutions temporelles différentes à partir d'une condition initiale.

1.2 Le portrait de phase sans résoudre l'équation différentielle

L'équation différentielle était :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

voyons si l'on peut tracer le portrait de phase sans la résoudre.

Pour mieux comprendre ce que nous allons faire, on renomme la grandeurs portée sur l'axe des ordonnées :

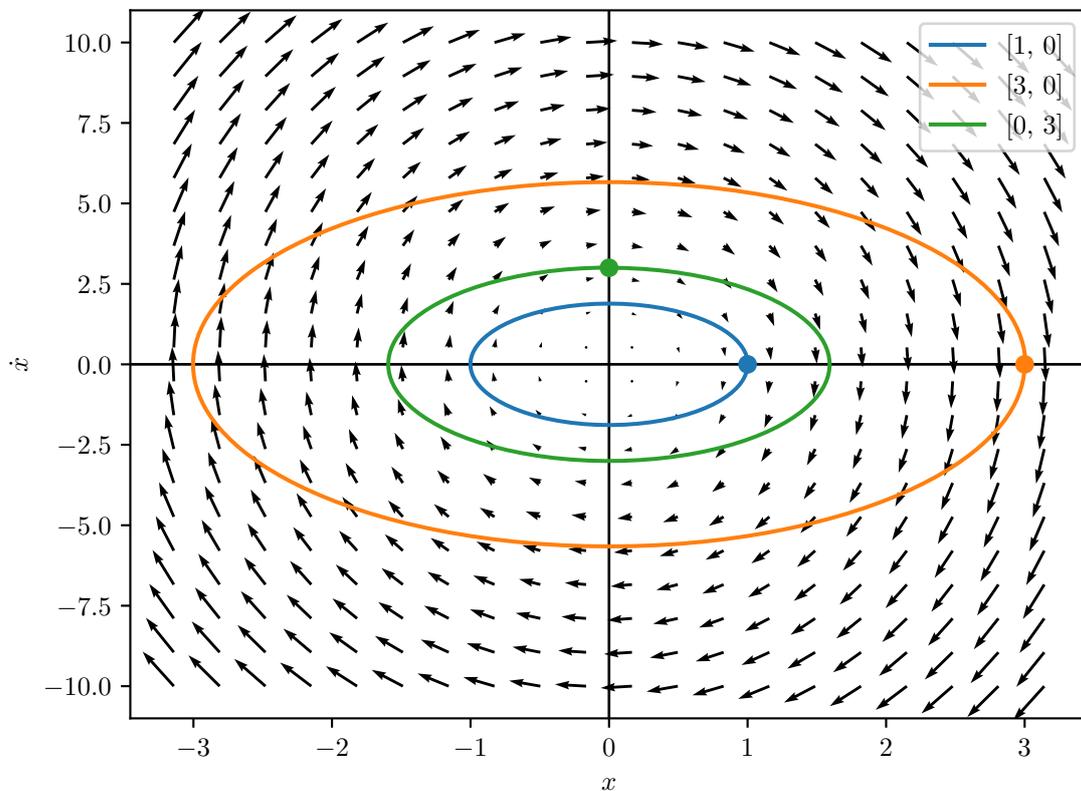
$$\dot{x} \equiv v$$

On peut alors écrire :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\omega x \end{cases} \implies \begin{cases} x(t + dt) = x(t) + v dt \\ v(t + dt) = v(t) - \omega x dt \end{cases} \implies \begin{cases} dx = v dt \\ dv = -\omega x dt \end{cases}$$

Cela revient à dire que pour chaque point (x, v) du portrait de phase, on peut déterminer la position du point « suivant » $(x + dx, v + dv)$ qui sera occupé par le système. On représente schématiquement le résultat de notre travail sur le portrait de phase par des flèches qui pointent d'un point vers l'autre.

Les trajectoires suivies par le système sont celles qui sont tangentes au réseau de flèches.



2. Autres exemples sur l'oscillateur harmonique

2.1 Régime amorti

Système	Amortissement	x	ω^2	Q
Masse-ressort	frottement fluide	position	k/m	$\frac{1}{\alpha} \sqrt{\frac{k}{m}}$
Circuit LC	résistivité	tension u_c	$1/LC$	$\frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$
Pendule simple	frottement fluide	angle	g/l	$\frac{m}{\alpha} \sqrt{gl^3}$

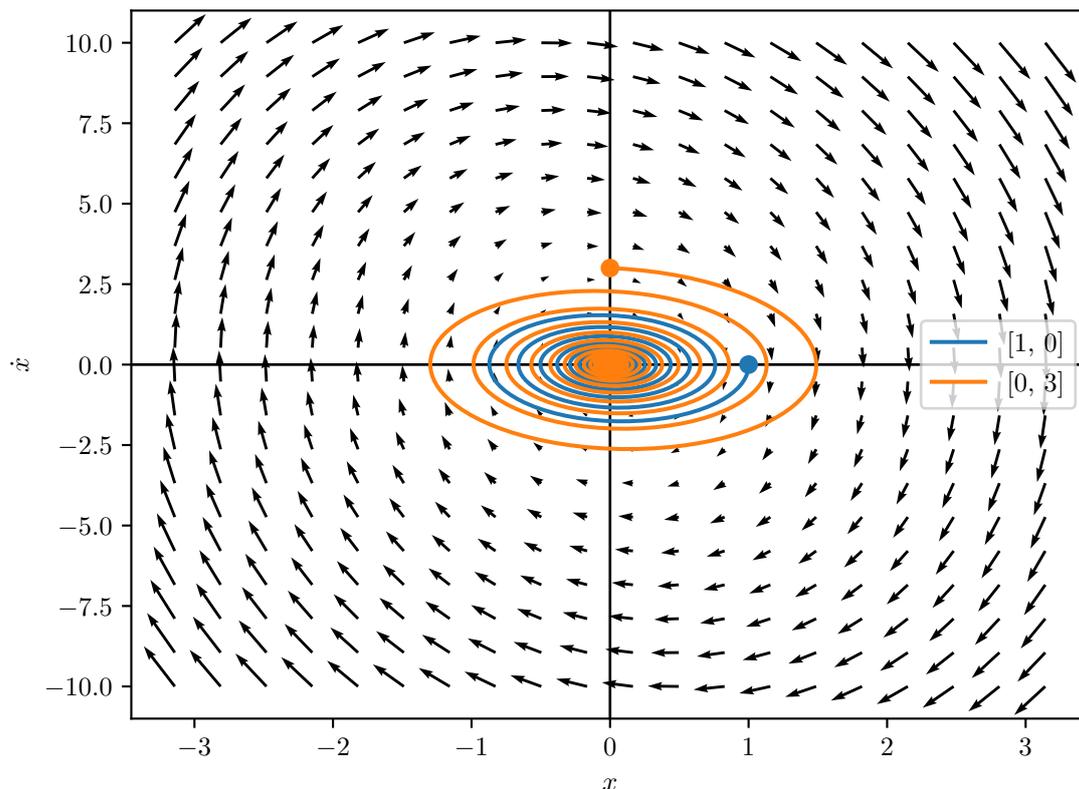
NOTES Reprendre le calcul pour le Q du pendule, vérifier l'homogénéité.

L'équation différentielle pour un oscillateur harmonique amorti est :

$$\ddot{x} + \frac{\omega}{Q} \dot{x} + \omega^2 x = 0$$

On écrit alors le système d'équations qui permet de tracer le portrait de phase :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{\omega}{Q}v - \omega^2 x \end{cases} \implies \begin{cases} dx = v dt \\ dv = -\frac{\omega}{Q}v dt - \omega^2 x dt \end{cases}$$

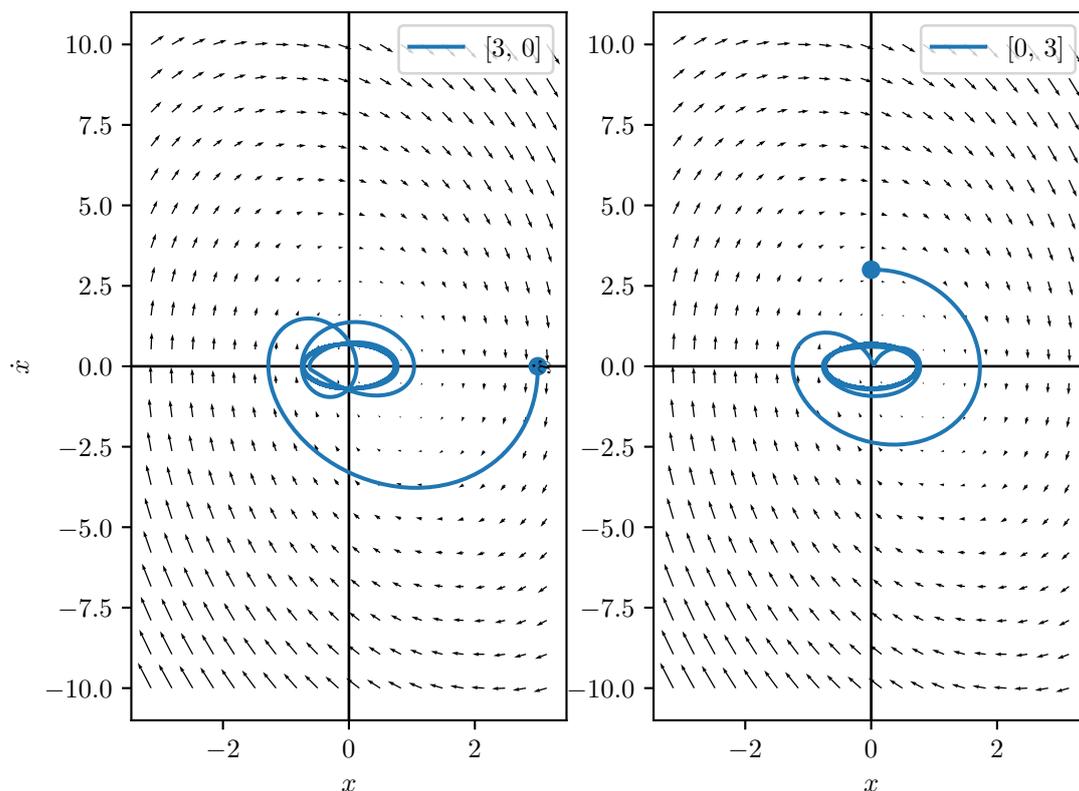


Dans cet exemple la trajectoire de phase est une spirale qui converge vers le centre du graphique : la position stable du système. On dit que ce point est un *attracteur*.

Contrairement à l'oscillateur harmonique non amorti, les trajectoires ici ne sont pas fermées : le système n'oscille pas indéfiniment car l'énergie n'est pas conservée. L'énergie du système s'écrit toujours $E = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2$ et est proportionnelle à $\mathcal{E} = \dot{x}^2 + \omega^2x^2$, donc à la distance du centre du graphe jusqu'au point qui correspond à son état. On lit aisément sur le portrait de phase que l'énergie du système amorti diminue au cours du temps.

To-Do Parler des valeurs de Q et de sa signification, et de sa lecture graphique.

2.2 Régime forcé



MANIP' En pratique, il n'est pas évident de forcer un pendule on utilise plutôt le circuit RLC série pour illustrer ce portrait de phase.

L'équation différentielle pour un oscillateur harmonique en régime forcé s'écrit :

$$\ddot{x} - \frac{\omega}{Q}\dot{x} + \omega^2x = \Gamma \cos(\omega_m t)$$

où le second membre correspond au couple moteur.

NOTES Attention, Γ n'est pas homogène à un couple, mais le second membre y correspond qualitativement, bien vérifier tout ce qu'on dit.

On peut donc écrire :

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = -\frac{\omega}{Q}v - \omega^2x + \Gamma \cos(\omega_m t) \end{cases}$$

Ce qui pose problème ici, c'est que les flèches dans le portrait de phase vont dépendre de l'instant auquel le tracé correspond. L'outil numérique permet de prédire les trajectoires sans problème, mais ... ?

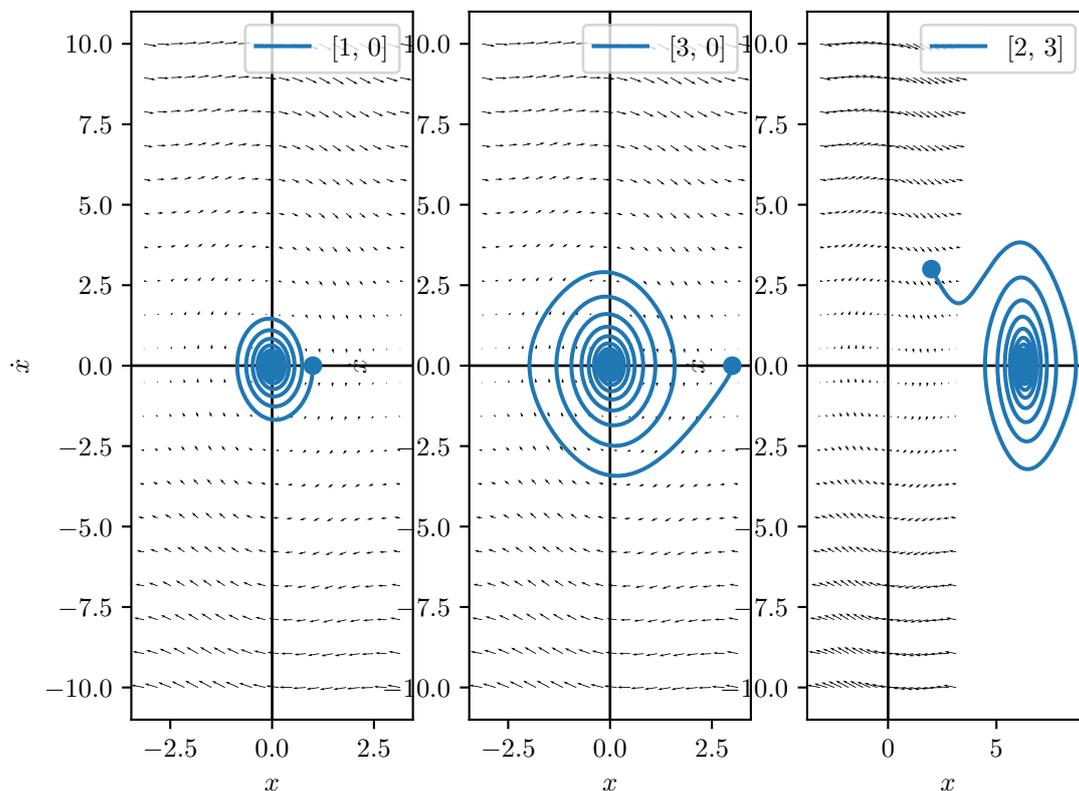
3. Systèmes non linéaires

3.1 Pendule en dehors de l'approximation des petits angles

Jusqu'ici nous avons présenté le pendule comme un oscillateur harmonique mais nous savons que l'équation différentielle issue du principe fondamental de la dynamique est :

$$\ddot{x} - \frac{\omega}{Q}\dot{x} + \omega^2 \sin(x) = 0$$

Cette équation différentielle non linéaire est plus difficile à résoudre mathématiquement. Mais heureusement, nous avons vu que cela ne vas pas être nécessaire. On peut tracer le portrait de phase du pendule et constater que : ...



3.2 Oscillateur de Van der Pol ?

quartique ? enrichissement spectral ?

Leçons de chimie

LC 1 : Chimie et couleur (Lycée)

1. L'origine de la couleur des molécules organiques (1erS)

Dans la nature, les légumes sont colorés on trouve plusieurs familles de colorants :

- β -carotène dans les carottes
- lycopène dans la tomate

sur ces deux molécules on constate la présence de nombreuses liaisons conjuguées.

Le pourpre royal, extrait de coquillages et l'indigo sont deux autres exemples. Ils ont des représentations topologiques très proches mais n'ont pas la même couleur.

La tartrazine (E102) et le rouge para appartiennent à une autre famille de colorants.

Sur toutes ces molécules on constate un grand nombre de liaisons conjuguées. On estime qu'au delà de 7 liaisons les molécules organiques absorbent dans le visible et prennent donc une couleur. Plus le nombre de liaisons est important plus le composé absorbe à des longueurs d'ondes grandes donc proches du rouge (donc le composé apparaît bleu).

2. Synthèse d'un colorant : le rouge para (1erS)

Remarque : NaNO_2 conservateur alimentaire (toxique)

Maintenir le milieu réactionnel entre 4 et 10 degrés celsius.

3. La couleur comme un outil (TS)

3.1 Dosage des espèces colorées par spectrophotométrie

On ne le fait pas ici mais dans la partie suivante on va utiliser quelque chose de très proche.

3.2 Détermination du pKa du BBT [51]

En partant de c_0 pour les 3 solutions.

$$A_1(\lambda) = l\epsilon_{AH}(\lambda)c_0$$

$$A_2(\lambda) = l\epsilon_{A^-}(\lambda)c_0$$

$$A_3(\lambda) = l(\epsilon_{AH}[AH] + \epsilon_{A^-}[A^-])$$

3.3 Titrage d'une solution de soude par l'acide chloridrique

Avec le BBT comme indicateur coloré. (Base forte par acide fort \rightarrow pH de fin de dosage = 7)

LC 2 : Séparations, purifications, contrôles de pureté (Lycée)

LC 3 : Polymères (Lycée)

Marcelin Bercelot, 1886 reconnaît le et nomme le polystyrène comme un polymère. Mais polymères déjà utilisés avant (résine, tissu) comme substituant de matériaux précieux.

Aujourd'hui on produit plus de polymères que d'acier.

1. Généralités

1.1 Définitions

Polymères ; macromolécule ; monomère ; degré de polymérisation. Regarder dans le BO.

1.2 Classification des polymères

Modèle moléculaire ?

Homopolymère (polystyrène) ; copolymère (nylon) alterné ou statistique.

Ramifié ; linéaire ; peigne ; macrocyclique.

2. Réactions de synthèse

2.1 Polyaddition

Styrène : protocole, équation de réaction, parler de l'AIBN et du stabilisant. [51]

2.2 Polycondensation

Nylon : manip, remplacer solvant par cyclohexane.

3. Propriétés mécaniques

LC 4 : Chimie durable (Lycée)

LC 5 : Synthèses inorganiques (Lycée)

Niveau STL-SPCL

La chimie organique est le nom donné à l'étude des réactions chimiques qui engagent des atomes de carbones, à l'exception près du graphite et des autres corps simples, des oxydes de carbone, carbonates et autres composés simples.

Par opposition, la chimie inorganique correspond à l'étude des autres espèces chimiques naturelles ou artificielles : les métaux, leurs alliages et leurs oxydes ou dérivés. Dans cette leçon et dans le cadre du programme de STL-SPCL, nous allons nous concentrer sur les *complexes*.

1. Les complexes

NOTES

Atome central chargé positivement, entouré de ligands neutres ou négatifs.
Liaisons covalentes de coordination : les deux électrons sont fournis par le ligand.

Monodenté :

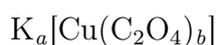
Polydenté :

(Savoir aussi : ambidante, chélatant, ambidante, ...)

Charge du complexe :

2. Synthèse d'un complexe [38]

2.1 Synthèse



2.2 Analyse

Détermination des coefficients a et b

LC 6 : Stratégies et sélectivités en synthèse organique (Lycée)

1. Synthèses en chimie organique : exemple de l'aspirine

1.1 Comment arriver au produit ?

Acide acétique et acide salicylique : on sait que la réaction va être la bonne, car chimio-sélectivité.

Parler de la sécurité.

1.2 Mise en oeuvre

1.3 Isolement de l'aspirine

Isolement, purification.

1.4 Contrôle de pureté

1.5 Rendement

2. Autres exemples

2.1 Synthèse d'un liquide

2.2 Protection de fonctions

LC 7 : Dosages (Lycée)

1. Dosage par étalonnage d'une solution colorée

Sirop de menthe commercial.

NOTES Aller vite sur cette partie.

2. Dosage par titrage direct

Travailler sur les incertitudes.

Solution d'aspirine.

2.1 Titrage colorimétrique

2.2 Titrage pH-métrique

Exploiter cette mesure.

NOTES On peut aussi proposer le dosage conductimétrique. Les dosages indirect et retour sont hors programme.

LC 8 : Cinétique et catalyse (Lycée)

Biblio : 100 manips de chimie, Mesplède. Hachettes TS 2012.

$2\text{I}^- + \text{S}_2\text{O}_8^{2-} \rightarrow \text{I}_2 + 2\text{SO}_4^{2-}$ à chaud, à froid, ambiante, très lente.

$\text{Fe}^{3+} + 2\text{HO}^- \rightarrow \text{Fe}(\text{OH})_3$ rapide

1. Définitions

Voir le BO pour définir la notion de vitesse de réaction.

2. Suivi temporel d'une réaction

2.1 Différentes méthodes

On cherche à mesurer $\xi(T)$, qui est lié à la concentration des espèces. On veut mesurer ça en fonction du temps : on ne peut pas utiliser une méthode destructive : on va utiliser une méthode physique (A, pH, G, P).

2.2 Suivi

Exemple avec le diiode par spectro. Faire le spectre de I_2 avant attention à ne pas saturer le spectro en fin de réaction suivie.

2.3 Notions supplémentaires

Temps de demie réaction.

3. La catalyse

À nouveau diiode avec sel de Mohr.

4. Autres facteurs cinétiques

4.1 Concentration des réactions

4.2 Température

4.3 Autres

LC 9 : Caractérisations par spectroscopie en synthèse organique (Lycée)

Biblio : Hachette TS. Belin TS. Chimie des couleur et des odeurs.

1. Synthèse de l'indigo

1.1 Réalisation

1.2 Spectre UV/VIS

Attention, indigo pas soluble dans l'eau. Soluble dans EtOH, cuve en verre.

Faire le spectre, regarder le cercle chromatique.

Permet de comparer au spectre de l'indigo tabulé. Mais ne nous permet pas de caractériser une nouvelle molécule.

1.3 Specre IR

On identifie la plupart des liaisons par comparaison (jusqu'à 1500 cm^{-1}) qu'on peut comparer dans une table.

2. Synthèse d'une molécule odorante

Acétate d'isoamyle, odeur de banane.

2.1 Équation de réaction

Formule brute $\text{C}_7\text{H}_{14}\text{O}_2$ vu le bilan.

2.2 Spectre IR

On compare le spectre des réactifs à celui du produit.

On peut en déduire que ce n'est pas un alcool, c'est un ester (il y a un carbone tétra?).

Quelque isomères probables : montrer des formules topologiques, il y en a une vingtaine...

2.3 Spectre RMN

Permet de conclure. Ethanoate de 3 méthylbutyle.

LC 10 : Du macroscopique au microscopique dans les synthèses organiques (Lycée)

Niveau TS

Prérequis Groupes caractéristiques (1S) Polarisation et électronégativité (1S)

Dans le cours de chimie depuis la seconde, nous étudions des réactions en chimie organique au cours desquelles des molécules se transforment en échangeant des atomes ; nous apprenons à reconnaître certains « groupes caractéristiques » et l'on apprend qu'ils sont responsables de la réactivité des molécules.

Dans cette leçon, nous allons découvrir la raison pour laquelle les groupes caractéristiques sont les lieux réactifs des molécules, et comment ils interagissent entre eux pour en former de nouvelles.

Nous allons nous appuyer sur la synthèse du paracétamol **D** ainsi qu'une autre réaction illustrative **C**.

MANIP' Lancer la synthèse **D** : ajouter l'excès d'anhydride et chauffer. Au cours de la leçon il faudra surveiller la réaction et filtrer le produit quand elle aura eu lieu, pour démarer la recristallisation.

MANIP' Lancer la synthèse **C** : ajouter l'acide phosphorique et chauffer. Au cours de la leçon il faudra surveiller la réaction, la température ne doit pas dépasser 95 °C mais le débit du distillat doit être correct.

1. La synthèse du paracétamol

La synthèse du paracétamol se fait à partir de deux réactifs : le paraaminophénol et l'anhydride acétique.

Sur le paraaminophénol on reconnaît : un groupe amine, un groupe alcool, un cycle aromatique. Sur l'anhydride acétique on reconnaît : un groupe anhydride. Sur le paracétamol on reconnaît : un groupe amide, un cycle aromatique, un alcool. Sur l'acide éthanoïque on reconnaît : un groupe acide carboxylique.

La transformation ne se fait pas en une seule étape. Pendant la réaction chimique les molécules se déplacent et certains groupes d'atomes réagissent deux-à-deux. On peut écrire chacune des étapes de la réaction et montrer les espèces intermédiaires.

NOTES Dessiner les étapes du mécanisme indiquées dans **D**, mais en séparant la dernière étape acide-base en deux.

Nous reviendrons sur ces étapes tout au cours de la leçon pour les comprendre.

2. Catégories de réactions

On peut catégoriser les différentes réactions chimiques selon les liaisons qui sont modifiées.

Le rôle de la spectroscopie Mais au fait, comment sait-on quelles liaisons sont rompues et lesquelles sont formées ?

C'est le rôle de la spectroscopie en particulier ici, la spectroscopie infrarouge nous renseigne sur la nature des liaisons qui composent les molécules.

MANIP' Récupérer une goutte du distillat.

Dans le cas de la synthèse **C** le réactif est le 2-méthylcyclohexan-1-ol, son spectre IR montre la présence de la fonction alcool. Le produit de la réaction nous est inconnu mais son spectre IR montre que la fonction alcool a disparu, tandis que une double liaisons carbone-carbone a été formée.

MÉDIA 2-méthylcyclohexan-1-ol :

http://www.hanhonggroup.com/ir/img/583-59-5_IR1.gif

1-méthylcyclohexène :

https://www.chemicalbook.com/Spectrum/591-48-0_IR1.gif

2.1 Élimination

Les réactions d'élimination sont celles au cours desquels une seule molécule se divise pour former deux molécules. Il y a alors rupture d'une liaison simple et formation d'une liaison multiple. Dans le cas de la synthèse du paracétamol, la deuxième étape est une élimination.

2.2 Addition

Les réactions d'addition sont celles au cours desquels deux molécules se combinent pour en former une seule. Il y a alors rupture d'une liaison multiple et formation d'une liaison simple. Dans le mécanisme de la synthèse du paracétamol, la première étape est une addition.

Notons que, même si dans notre cas d'étude, l'addition est suivie d'une élimination, cela n'est pas toujours le cas.

MANIP' Décoloration de l'eau de brome en présence d'alcène **B**. Sur cette réaction, on *voit* les molécules colorées disparaître.

On peut comparer le spectre de l'alcène à celui de l'alcane bromé.

MÉDIA Table infrarouge : [14], spectre : [./document/stilbene_bromation.pdf](#)

De la même manière pour le paracétamol, le spectre IR ou RMN du produit nous renseigne sur la nature des liaisons qui la composent.

MÉDIA <https://tice.ac-montpellier.fr/ABCDORGA/Famille/Tp/PARACETAMOL.GIF>

Déplacement (cm^{-1})	Liaison	Groupe
3325,9	N–H	amide
3160,9	O–H	alcool
3000–3100	C–H	aromatique
1654,4	C=O	amide
1610,8	N–H	amide

MANIP' Décolorer l'eau de brome avec le distillat de C.

2.3 Substitution

Dans le cas de la synthèse du paracétamol il n'y a pas de substitution dans le mécanisme, même si l'équation globale y correspond.

3. L'origine des réactions

3.1 Sites donneurs, sites accepteurs

Lors de formation ou rupture de liaisons entre atomes, ce sont des doublets électrons qui se déplacent.

Dans la première étape de la synthèse du méthylcyclohexène un doublet non liant d'électrons qui se trouve entre sur atome d'oxygène va se déplacer pour lier l'atome d'oxygène à un ion d'hydrogène.

Si cette modification microscopique à lieu, c'est parce que l'ion hydrogène attire fortement les électrons en raison de sa charge positive. Dans cette situation on dit que l'hydrogène est un site accepteur de doublet d'électrons, alors que le doublet non liant de l'oxygène est un site donneur.

On peut représenter le mouvement du doublet d'électron par une flèche courbe.

NOTES Le faire pour cette étape du mécanisme. Puis démarer pour celles du paracétamol dans la section suivante.

La question est alors de savoir ce qui rend certains sites donneurs et d'autres accepteurs.

3.2 Électrénogativité des éléments et polarisation des liaisons

Dans la première étape de la synthèse du paracétamol l'azote se lie à un carbone, qui est un site accepteur. Pourquoi ce carbone est-il accepteur ?

C'est à cause de la polarisation des liaisons C–O et C=O. À chaque élément de la classification périodique on associe une grandeur appelée *électrénogativité* qui caractérise la « force » avec laquelle le noyau « tire » sur les électrons.

MÉDIA [https://en.wikipedia.org/wiki/Electronegativities_of_the_elements_\(data_page\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Electronegativities_of_the_elements_(data_page))

L'oxygène est plus électronegatif que le carbone. Donc le carbone que nous étudions ici est très peu riche en électrons : on dit que la liaison est polarisée (ce que l'on représente

par une flèche sur la liaison), et que le carbone porte une *charge partielle* positive δ^+ ce qui fait de lui un site accepteur de doublets (les électrons étant de charge négative).

NOTES Procéder à la description des étapes qui suivent en termes d'électronégativités et de polarisation.

Dans la deuxième étape de la synthèse du paracétamol un oxygène à pourtant partagé un doublet avec un carbone. Dans cette situation, la charge négative portée par l'oxygène change tout : l'électronégativité de l'oxygène à peu d'importance par rapport à l'excès de charge négatives qui à tendance à repousser les doublets. L'oxygène donne donc un doublet au carbone. Ce dernier doit respecter la règle de l'octet, et pour cela il doit repousser un autre doublet : comme l'autre oxygène est un site accepteur il va en récupérer un en cassant la liaison.

NOTES L'azote peut aussi récupérer le doublet d'où l'aspect réversible de la première étape.

NOTES Notons que pour s'aider à déterminer quel site est le meilleur donneur, on peut regarder l'espèce chimique présente dans l'étape suivante : c'est ce qui est demandé au programme de TS.

MANIP' Filtrer le produit recristallisé, dire qu'il faut le mettre à l'étuve.

Récupérer le produit mis à l'étuve pendant la préparation, le peser, calculer le rendement.

MANIP' Idem avec le distillat.

LC 11 : Capteurs électrochimiques (Lycée)

1. Construction d'un capteur

1.1 Demi de concentration

Idée, problème, solution.

1.2 Électrode de référence d'argent

2. Etude du capteur

2.1 Sélectivité

2.2 Sensibilité, linéarité

3. pH mètre

LC 12 : Molécules de la santé (Lycée)

0.1 Contraintes en chimie de la santé

0.2 Synthèse d'un médicament

0.3 Analyse d'un désinfectant

LC 13 : Stéréochimie et molécules du vivant (Lycée)

BUP 77. Hachette TS. JFLM2.

1. Représentation spatiale des molécules

1.1 Problème avec la représentation plane

1.2 Chiralité et molécules chirales

Acides alpha aminés tous chiraux sauf glycine.

1.3 Carbones asymétriques

Glucose, mannose.

1.4 Stéréoisoméries

Enantiomères, diastéréoisomères.

2. Propriétés physiques des diastéroisomères

2.1 Solubilité

Acide fumarique, acide maléique en tubes à essai.

2.2 Température de fusion

Idem.

2.3 Diastéroisomères dans le vivant

Rétinal rhodopsine.

3. ??

+/- limonène n'ont pas la même odeur.

4. Importance

Médicaments, énantiomère toxique.

Vache folle, conformation des protéines.

LC 14 : Acides et bases (Lycée)

http://photochemistry.epfl.ch/ERC/ERC_16_Chapitre_7C.pdf

1. Acides et bases

1.1 Acide fort, base forte

Soude dans l'eau, le pH change. Acide chlorhydrique dans l'eau, le pH change.

À quoi est-ce du ? Dissociation des espèces, formation d'ions HO^- ou H_3O^+ .

Définition du pH. Déterminer l'avancement des réactions précédentes (totales).

(pas de pka pour les acides/bases forts)

1.2 Acide faible, base faible

On suppose que c'est pareil, si la réaction était totale on aurait $\text{pH} = \text{blabla}$. Mais expérimentalement, non.

Constante d'acidité, équilibre.

1.3 Cas particulier de l'eau

Les autres couples sont caractérisés par leur pka dans l'eau.

L'eau est ampholyte, équilibre d'autoprotolyse. Le rapport est constant mais la concentration de H_3O^+ peut varier.

2. Caractérisation d'un couple acido-basique

2.1 Détermination d'une constante d'acidité

Dosage, pH de demie équivalence glycine (acide alpha aminé car en avant dans le BO de TS).

2.2 Solution tampon

Sur la courbe du dosage.

LC 15 : Liaisons chimiques (Lycée)

1. De l'atome à la molécules

1.1 Configuration électronique

Électrons de valence, couches KLM. Doublets liants et non liants.

Les gaz rares ne réagissent pas, ils sont stables. Les atomes veulent aller vers le gaz rare le plus proche : règle de l'octet, duet.

1.2 Représentation de Lewis

On sait combien de liaisons chaque atome peut former.

Exemple connus : H_2 , O_2 , H_2O , CO_2 .

1.3 Électronégativité, polarité des liaisons

2. Géométrie des liaisons dans l'espace

Modèles moléculaires.

On se concentre sur Z/E.

2.1 Doubles liaisons

2.1.1 Processus de la vision et stéréochimie

CCM de l'E-azobenzène. Z polaire mobile, E apolaire fixe.

Comme le rétinal. On voit, mais quoi ?

2.1.2 Molécules colorées

Beta carotène, 11 liaisons conjuguées > 7 .

3. Réaction chimique : formation et rupture de liaisons

Synthèse d'un composé organique. Caractérisation IR et RMN.

LC 16 : Solvants (CPGE)

LC 17 : Classification périodique (CPGE)

Niveau MPSI

La classification périodique des éléments que l'on trouve dans toutes les salles de physique-chimie fut mise en forme par Dimitri MENDELEÏEV en 1869. Il n'était pas le premier à remarquer une possible périodicité entre les éléments (triades de DOBEREINER, tétrades de DUMAS, octave de NEWLAND) mais il est le premier à l'avoir explicitée et à avoir classé les éléments alors connus. Il réussit à *prévoir* l'existence de certains éléments et certaines leurs propriétés chimiques ou physiques (Germanium : GeO_2 , GeCl_4 , densité, masse molaire ; confirmé en 1875).

Il est remarquable que la découverte de l'électron (THOMSON, 1897) du noyau atomique (RUTHERFORD, 1911) du neutron (CHADWICK, 1932) soient *postérieures* au travail de MENDELEÏEV.

Dans cette leçon nous mettrons en évidence l'existence d'une périodicité des propriétés chimiques conformément à la classification connue.

MANIP' Précipitation des halogénures d'argent (K^+ , X^- dans Ag^+ , NO_3^-), mise en évidence d'une réactivité similaire.

1. L'élément chimique

To-Do Définir proprement l'élément chimique.

En classant les éléments par Z croissant, on rencontre une périodicité des propriétés chimiques. Une structure à deux dimensions apparaît. Les lignes sont nommées « périodes » et les colonnes « familles » ou « groupes », en MPSI il faut savoir nommer la colonne des alcalins, des halogènes, des gaz nobles.

1.1 Configuration électronique

Le remplissage des sous-couches se fait selon les règles de KLESHKOWSKI, on donnera l'exemple du chlore, puis du brome et du magnésium qui partagent avec Cl la colonne ou la ligne.

La connaissance de la configuration électronique d'un élément permet de connaître sa position dans le tableau en un coup d'œil (et inversement), elle permet aussi de déterminer le nombre d'électrons de valence d'un atome dans l'état fondamental. C'est d'ailleurs cela qui justifie après coup les travaux de MENDELEÏEV puisque la réactivité chimique des éléments est fortement régie par leur nombre d'électrons de valence.

Expliciter la configuration de chaque élément dans la classification fera remarquer que la géométrie du tableau n'est pas hasardeuse. On distingue quatre *blocs* qui groupent entre eux les éléments dont la sous-couche de plus haute énergie porte la même lettre (le même nombre quantique l).

À savoir qu'il existe des exceptions aux règles de KLESHKOWSKI (chrome, molybdène)

qui ne sont pas exigibles en MPSI.

To-Do Parler des métaux de transition ?

1.2 Électronégativité

L'électronégativité d'un élément est la capacité des atomes correspondants à attirer vers eux les électrons dans une liaison chimique. Elle augmente vers le haut et vers la droite, mais n'est pas définie pour les gaz nobles puisqu'ils ne font pas de liaisons chimiques. (Attention, XeF_6 existe.)

L'électronégativité est liée à d'autres propriétés physiques ou chimiques qui évoluent dans la classification périodique (métallicité, énergie de première ionisation ($\text{X(g)} \longrightarrow \text{X}^+(\text{g}) + \text{e}^-$), affinité électronique, énergie d'attachement électronique ($\text{e}^- + \text{X}^+(\text{g}) \longrightarrow \text{X(g)}$)) mais nous ne discutons ici que du caractère oxydant.

2. Mise en œuvre expérimentale

2.1 Réduction des alcalins

To-Do Trouver une bonne vidéo.

2.2 ...

To-Do Trouver quelque chose de sympa, oxydation du fer, combustion du carbone, ...

2.3 Pouvoir oxydant des halogènes [59]

Le pouvoir oxydant augmente de bas en haut.

MANIP' Le BUP [59] est utile pour le principe et les valeurs numériques, mais on réalisera les expériences en faisant réagir de l'eau de chlore, de l'eau de brome et de l'eau d'iode en tubes à essai. Cl_2 est oxydé par Br^- , Cl_2 est oxydé par I^- , Br_2 est oxydé par I^- .

2.4 Rayons atomiques

NOTES À garder sous le coude.

3. Généralités sur la classification

NOTES À raconter ou non selon le temps restant.

- Les éléments les moins lourds sont les plus abondants
- Chaque élément peut être présent sous plusieurs isotopes selon des abondances qui peuvent varier fortement
- Les lanthanides et les actinides sont déplacés vers le bas par souci de lisibilité
- Depuis 2016, il y a 118 éléments qui portent un nom IUPAC, attention aux vieux tableaux

- Les éléments au-delà de l'uranium sont tous créés en laboratoire et n'ont jamais été rencontrés dans la nature
- La classification semble complète mais rien ne dit qu'on ne pourra pas créer de nouveaux éléments dans une huitième ligne

LC 18 : Solides cristallins (CPGE)

LC 19 : Corps purs et mélanges binaires (CPGE)

1. Corps purs

1.1 Diagramme de phase

Cas général ; eau (liophilisation, patin à glace, exp pain de glace, fils, masse ?).

Placer tous les points intéressants et leurs coordonnées (au tableau) : (P_T, T_T) , (P_C, T_C) , (P_{atm}, T_{amb}) .

Dans cette leçon on s'intéresse à la courbe S/L .

1.2 Courbe d'analyse thermique

Permet de construire la courbe de S/L dans (P, T) .

1.3 Variance

Tracer la courbe (pas forcément la manip), premier grain, dernière goutte, calculer la variance (dénombrer params *intensifs indépendants*) (ex sur le plateau : $X = \{T, P\}$; $Y = \{\mu_l(T, P) = \mu_s(T, P)\}$; $V = 1$ donc $T = f(P)$ si on fixe P , alors T est fixé); (ex sur le PT : $X = \{T, P\}$; $Y = \{\mu_l(T, P) = \mu_s(T, P), \mu_l(T, P) = \mu_v(T, P)\}$ ($\mu_s(T, P) = \mu_v(T, P)$ est CL des deux autres); $V = 0$ donc aucun paramètre libre).

2. Mélange binaires

On se restreint aux mélanges à miscibilité nulle sans composé défini (vs à miscibilité totale ou miscibilité nulle avec composé défini) car un peu plus riche et en accord avec l'expérience qui suit.

Rq : on peut aussi se concentrer sur miscibilité totale et prendre β_{naph} .

2.1 Courbe d'analyse thermique

α naph tol , naphthalène

Suivi Latis d'une part, relevé visuel premier cristal d'autre part.

Surprises!

2.2 Diagramme binaire

Zones, phases, variance.

2.3 Applications

Soudure, salage des routes, banc koeffler, fondants.

LC 20 : Application du premier principe de la thermodynamique à la réaction chimique

Daumarie, Florilège. Cachau : Redox, AcB. Tout en un PC/PC*.

1. Notions (rappels) de thermodynamique

1.1 Premier principe en système ouvert

Poser les notations, introduire H et dH à pression constante et volume constant (id thermo) écrire dH comme la somme des dérivées partielles.

1er principe, simplifier les termes. Il reste : $dH = \delta W_p + \delta Q$.

1.2 Capacités thermiques

Dérivée partielle de H par rapport à T .

De combien varie H quant T change de 1.

Normale = Standard pour les phases condensées car la pression d'intervient pas.

1.3 État standard de référence

Corps purs simples dans l'état physique le plus stable à pression standard et T . Exemples.

1.4 Enthalpie molaire de formation

Exemple avec l'eau. Valeur. Corps purs simple nulle.

1.5 Enthalpie molaire standard de réaction

Somme des dérivée partielle de H par rapport aux n_i . Réécrire avec l'avancement d'une réaction. Loi de Hess.

2. Réactions isobares et adiabatiques : calorimétrie

(Penser à déterminer l'équivalent en eau du calorimètre et le prendre en compte dans les calculs.) (Penser à calculer un ODG relatif à l'agitation.)

2.1 Détermination de l'enthalpie d'hydratation de Na_2CO_3

2.2 Dosage de l'acide phosphorique

J'ai essayé de doser H_3PO_4 un triacide, mais on ne voit que deux saut de pH... Car le pH de fin de dosage est trop proche du pka.

Comment faire pour doser la troisième acidité? Quand on ajoute acide et base, ça

chauffe... Hum. On va essayer.

LC 21 : Détermination de constantes d'équilibre (CPGE)

Buchère. Fosset. Cachau AcB. Florilège, Daumarie. Un autre livre vert et noir je crois.

1. Rappels sur les équilibres chimiques

1.1 Thermo

P, T fixé. ξ l'avancement.

1.2 Constante d'équilibre

Expression.

1.3 Détermination

On doit déterminer les activités à l'équilibre.

2. Détermination par potentiométrie

Constante de formation de $\text{Ag}(\text{NH}_3)_2$ par la soude.

On ne connaît pas $b = 2...$ or il intervient dans l'expression de la constante.

On va le déterminer et en même temps déterminer la constante K.

3. Détermination par spectrophotométrie

pKa du BBT

4. Détermination par potentiométrie (choisir)

Ks avec une demi pile.

LC 22 : Cinétique homogène (CPGE)

Niveau MPSI

Nous nous limitons aux réactions associées à un milieu réactionnel formé d'une seule phase, et allons s'intéresser aux facteurs qui influent sur la *vitesse de réaction*.

MANIP' Dans 3 béchers à des températures différentes, faire réagir environ au même moment des ions iodure avec des ions peroxydisulfate selon $3\text{I}^- + \text{S}_2\text{O}_8^{2-} = \text{I}_3^- + 2\text{SO}_4^{2-}$. Penser à introduire les réactifs dans le bécher à la température la plus basse en premier.

TP-Do Tester la manip en TP!

1. Facteurs cinétiques

1.1 Température

Discuter qualitativement, avec un schéma, que l'augmentation de la température associée à une augmentation de l'agitation thermique permet au réactifs de passer plus facilement la barrière de potentiel du complexe activé.

1.2 Catalyse

La catalyse comme facteur cinétique figure peu dans le programme de MPSI. Les élèves doivent juste savoir ce qu'est un catalyseur.

1.3 Concentration des réactifs

Une augmentation de la concentration entraîne une augmentation de la probabilité qu'un choc entre molécules arrive. Les réactions chimiques ont lieu lors des chocs.

2. Étude cinétique d'une réaction

On se concentre sur l'exemple de la manip d'introduction.

2.1 Définition de la vitesse de réaction

Lorsque la réaction d'avancement ξ a lieu, alors pendant chaque intervalle de temps dt ,

- une quantité $dn_{\text{I}^-} = -3d\xi$ d'ions iodure disparaît,
- une quantité $dn_{\text{S}_2\text{O}_8^{2-}} = -d\xi$ d'ions peroxydisulfate disparaît,
- une quantité $dn_{\text{I}_3^-} = d\xi$ d'ions triiodure apparaît,
- une quantité $dn_{\text{SO}_4^{2-}} = 2d\xi$ d'ions sulfate apparaît

Il semble alors naturel de définir la vitesse de la réaction par :

$$\begin{aligned}
 u &\equiv -\frac{d\xi}{dt} = -\frac{1}{3} \frac{dn_{\text{I}^-}}{dt} \\
 &= -\frac{dn_{\text{S}_2\text{O}_8^{2-}}}{dt} \\
 &= +\frac{dn_{\text{I}_3^-}}{dt} \\
 &= +\frac{1}{2} \frac{dn_{\text{SO}_4^{2-}}}{dt}
 \end{aligned}$$

Elle renseigne sur la quantité de réactifs qui disparaît ou sur la quantité de produits qui apparaît au cours du temps.

Remarquons que si l'on écrit la réaction comme : $6\text{I}^- + 2\text{S}_{208}^{2-} = 2\text{I}_3^- + 4\text{SO}_4^{2-}$ la valeur de la vitesse va changer ($d\xi \rightarrow 2d\xi$). Cela pose problème concernant la tabulation de valeurs, la convention en cinétique est donc de définir la vitesse de réaction pour des équations ajustées avec tous les coefficients stoechiométriques entiers et le plus petit possible.

2.2 Vitesse de réaction en cinétique homogène isochore

Lorsqu'une réaction se fait à volume constant, on pourra définir une vitesse volumique de réaction $v = \frac{u}{V}$. L'intérêt est que l'on va pouvoir écrire la vitesse en fonction des concentrations des réactifs ou des produits :

$$v = \frac{u}{V} = -\frac{1}{V} \frac{1}{3} \frac{dn_{\text{I}^-}}{dt} = -\frac{1}{3} \frac{d[\text{I}^-]}{dt}$$

2.3 Ordre de la réaction

Certaines réactions chimiques admettent un *ordre*. Lorsque c'est le cas on pourra vérifier expérimentalement que la vitesse peut s'écrire :

$$v = k[\text{I}^-]^\alpha [\text{S}_2\text{O}_8^{2-}]^\beta$$

où k est la constante cinétique, α et β (≥ 0) sont les ordres partiels, $\alpha + \beta$ est l'ordre global, de la réaction.

Nous allons chercher si la réaction étudiée admet un ordre et si oui, quels sont les ordres partiels.

2.3.1 Dégénérescence d'ordre

Si l'on introduit l'un des réactifs en très petite quantité comparativement aux autres réactifs (par exemple $[\text{S}_2\text{O}_8^{2-}]_0 \ll [\text{I}^-]_0$), nous pourrions considérer que sa concentration est la seule à varier (on suppose les autres constantes). Cela permet de réécrire une approximation de la vitesse :

$$\begin{aligned}
 v(t) &= k[\text{I}^-]^\alpha(t) [\text{S}_2\text{O}_8^{2-}]^\beta(t) \\
 &\approx k[\text{I}^-]^\alpha(t=0) [\text{S}_2\text{O}_8^{2-}]^\beta(t) \\
 &= k' [\text{S}_2\text{O}_8^{2-}]^\beta(t)
 \end{aligned}$$

où k' est une constante cinétique *apparente*.

2.3.2 Résolution expérimentale [8]

MANIP' Montrer une échelle de teintes pour le triiodure en solution.

On peut parfois suivre expérimentalement l'évolution de la concentration d'une espèce dans le milieu réactionnel par spectrophotométrie. Dans notre cas d'étude, l'espèce I_3^- colore la solution en jaune. Par la loi de BEER-LAMBERT nous obtenons que l'absorbance et la concentration sont liées par $A_\lambda(t) = l\epsilon_{\lambda, I_3^-} [I_3^-]$ donc que :

$$v(t) = \frac{1}{l\epsilon_{\lambda, I_3^-}} \frac{dA}{dt} \quad (22.1)$$

TP-Do Déterminer la valeur de λ adéquat en TP! Et faire toute cette manip.

NOTES Méthode différentielle : établir les expressions de $[I_3^-](t)$ pour $\beta = \{0, 1, 2\}$ l'ordre partiel des ions peroxodisulfates

MANIP' Se placer en dégénérescence d'ordre et réaliser un suivi spectro pour plusieurs concentrations initiales en réactifs. Attention, se souvenir qu'il y a un problème lié à l'écrat en temps entre le début de la réaction et le début d'acquisition dans le spectro! Modéliser. Déterminer α .

To-Do Terminer en parlant de la loi d'ARRHENIUS qui est au programme.

LC 23 : Évolution et équilibre chimique (CPGE)

Niveau PSI

Nous nous limitons aux réactions chimiques uniques (une seule réaction à la fois) et qui se terminent par un équilibre (pas de réaction totale).

MANIP' Solution de NaCl saturée, ajout de HCl concentré, précipite.

Le précipité n'est pas lié au caractère acide.

Dans cette leçon on s'intéresse aux équilibres chimiques, à l'évolution (au sens thermodynamique) des réactions et aux moyens dont l'on dispose, comme expérimentateur, pour favoriser ou empêcher des réactions.

1. Bases de thermochimie

1.1 Potentiel thermodynamique

En thermochimie, on se place à $T_{ext} = \text{cste}$ et $P_{ext} = \text{cste}$, et on suppose un équilibre thermique et mécanique entre le système et l'extérieur au début et à la fin de la réaction. Il convient alors d'utiliser l'enthalpie libre ($G = U - TS + PV$) comme potentiel thermodynamique, puisque pour une transformation finie, $\Delta G = -TS_c \leq 0$.

1.2 Potentiel chimique

Par ailleurs l'identité thermodynamique qui s'écrit :

$$dG = VdP - SdT + \sum_i \underbrace{\left(\frac{\partial G}{\partial n_i} \right)_{P,T,n_j}}_{\mu_i} dn_i$$

nous renseigne sur l'enthalpie libre molaire partielle μ_i associée à chaque constituant du système.

Dans le cadre du programme de PSI, le potentiel chimique μ_i d'un constituant s'écrit selon l'expression générale :

$$\mu_i(T, P, n_j) = \mu_i^\circ(T, P) + RT \ln(a_i)$$

avec a_i l'activité du constituant, et μ_i° son potentiel chimique standard tabulé.

1.3 Enthalpie libre standard de réaction

Comme lors d'une réaction chimique l'avancement infinitésimal $d\xi$ permet d'écrire simplement la variation de quantité de matière de chaque constituant : $dn_i = \nu_i d\xi$; alors l'identité thermodynamique se réécrit :

$$dG = VdP - SdT + \underbrace{\sum_i (\mu_i \nu_i)}_{\Delta_r G} d\xi$$

En somme, pour une réaction chimique monobare et monotherme, le bilan d'enthalpie libre s'écrit : $\Delta G = \Delta_r G \cdot d\xi = -TS_c \leq 0$, avec $\Delta_r G = \sum_i (\mu_i \nu_i)$.

1.4 Critères d'évolution et d'équilibre

Puisque $\Delta_r G \cdot d\xi \leq 0$, on va pouvoir déduire du signe de $\Delta_r G$, le signe de $d\xi$, et donc le sens d'avancement de la réaction :

- si $\Delta_r G < 0$ alors $d\xi > 0$, la réaction se fait dans le sens direct,
- si $\Delta_r G > 0$ alors $d\xi < 0$, la réaction se fait dans le sens indirect,
- si $\Delta_r G = 0$, la réaction est à l'équilibre.

1.5 Constante d'équilibre

Avec :

$$\Delta_r G = \sum_i (\mu_i \nu_i) = \sum_i (\mu_i^\circ \nu_i) + RT \sum_i (\ln(a_i^{\nu_i})) = \Delta_r G^\circ + RT \ln(Q_r)$$

où Q_r est le quotient réactionnel, et $\Delta_r G^\circ$ une constante ; alors à l'équilibre,

$$\Delta_r G = 0 \implies RT \ln(Q_{r,eq}) = -\Delta_r G^\circ$$

on définit : $K^\circ(T) \equiv \exp\left(-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}\right)$ de sorte que : $Q_r = K^\circ(T)$ à l'équilibre.

Finalement, $\Delta_r G = RT \ln\left(\frac{Q_r}{K^\circ(T)}\right)$ et l'on retrouve des notions de première année :

- si $Q_r < K^\circ(T)$ alors la réaction se fait dans le sens direct,
- si $Q_r > K^\circ(T)$ alors la réaction se fait dans le sens indirect,
- si $Q_r = K^\circ(T)$ alors la réaction est à l'équilibre.

On schématise ce comportement avec un axe horizontal en Q_r , sur lequel on place K° .

To-Do Faire le schéma en illustrant la manip d'introduction.

2. Thermochimie des procédés chimiques

Dans cette partie nous exploitons les connaissances introduites concernant les conditions d'évolution et d'équilibre d'un système chimique. L'idée est de forcer des variations de Q_r ou de $K^\circ(T)$ pour favoriser ou empêcher la formation de produits.

2.1 Modification de Q_r par ajout ou extraction d'une espèce

2.1.1 Synthèse de l'acétate de linalyle, à l'odeur de lavande [67]

MANIP' Synthèse de l'acétate de linalyle à partir de linalol et d'acide éthanoïque, dans le cyclohexane sur DEAN-STARK pour déplacer l'équilibre vers les produits.

Le principe est le même que dans le cas précédent. Avant on forçait la réaction dans le sens indirect en ajoutant un produit, maintenant on la force dans le sens direct en retirant un produit.

2.2 La température et la pression [47]

MANIP' Équilibre $\text{NO}_2(\text{g}) \rightleftharpoons \text{N}_2\text{O}_4(\text{g})$ sous pressions ou à températures variable. On synthétise NO_2 par un protocole similaire à [47] en veillant à être plus soigné autant sur la sécurité que sur le matériel choisit.

Nous allons étudier le cas du dioxyde d'azote qui peut réagir selon $2\text{NO}_2(\text{g}) \rightleftharpoons \text{N}_2\text{O}_4(\text{g})$; cette réaction a une enthalpie standard de réaction $\Delta_r H^\circ = -57,23 \text{ kJ mol}^{-1}$, elle est donc exothermique. D'autre part on constate que lorsqu'elle se fait dans le sens direct, la quantité de matière est divisée par deux.

2.2.1 Pression (Q_r)

Le quotient de réaction s'écrit :

$$Q_r = \frac{a_{\text{N}_2\text{O}_4}}{a_{\text{NO}_2}^2} = \frac{P_{\text{N}_2\text{O}_4}}{P_{\text{NO}_2}^2} \cdot P^\circ = \frac{x_{\text{N}_2\text{O}_4}}{x_{\text{NO}_2}^2} \cdot \frac{P^\circ}{P_{\text{tot}}}$$

On constate qu'il dépend de la pression, on dira qu'elle est *facteur d'équilibre*.

Une augmentation de P_{tot} fait diminuer Q_r : la réaction se fait dans le sens direct.

2.2.2 Température ($K^\circ(T)$)

L'expression mathématique du phénomène nécessite de revenir à du calcul formel, on a :

$$\overbrace{\text{d}G = V\text{d}P - S\text{d}T + \Delta_r G\text{d}\xi}^{\text{identité thermodynamique}} \implies -S = \left. \frac{\partial G}{\partial T} \right|_P$$

d'où :

$$G \equiv H - TS = H + T \left. \frac{\partial G}{\partial T} \right|_P$$

on pourra en déduire la relation de GIBBS-HELMOLTZ :

$$\frac{H}{T^2} = \frac{G}{T^2} - T \left. \frac{\partial G}{\partial T} \right|_P = - \left. \frac{\partial \frac{G}{T}}{\partial T} \right|_P$$

Cette relation ici écrite sur G peut s'appliquer à une réaction finie monobare et donner :

$$\frac{\Delta_r H}{T^2} = - \left. \frac{\partial \frac{\Delta_r G}{T}}{\partial T} \right|_P$$

alors dans l'état standard :

$$\frac{\Delta_r H^\circ}{T^2} = - \left. \frac{\partial \left(\frac{-RT \ln(K^\circ(T))}{T} \right)}{\partial T} \right|_P \implies \frac{\Delta_r H^\circ}{RT^2} = \frac{\text{d} \ln(K^\circ(T))}{\text{d}T}$$

la relation de VAN'T HOFF.

Pour $\Delta_r H^\circ < 0$, la dérivée $\frac{\text{d}}{\text{d}T}(\ln(K^\circ(T)))$ est négative, donc $K^\circ(T)$ est une fonction décroissante de T . Autrement dit, l'augmentation de la température déplace la constante d'équilibre vers une plus petite valeur : lors un équilibre établi à T_2 suivi d'une diminution de température jusqu'à $T_1 < T_2$, la réaction rejoint le nouvel équilibre en avançant dans le sens indirect.

2.3 Principe de LE CHÂTELIER

Pour aller plus loin

Suite à cette leçon nous pourrons étudier des processus de réactions chimiques en chaînes. Nous verrons que des combinaisons linéaires d'équations chimiques conduisent à des relations simples sur les grandeurs thermodynamiques introduites dans cette leçon.

Nous pourrons aussi apprendre à déterminer les valeurs des grandeurs standard de réaction en utilisant des tables de données.

LC 24 : Diagrammes potentiel-pH (construction exclue) (CPGE)

Cachau : redox. Sazazin. JFLM.

1. Lecture du diagramme eph

Diode dans H_2O et soude : décoloration. Ajout d'acide : recoloration.

Projeter le diagramme pour I_2 , parler des couples. Montrer comme on s'est promené dans le diagramme.

2. Dosage des ions hypochlorite ClO^- dans l'eau de Javel

Mettre en situation.

Réaction si prédominance disjoints.

Titration par méthode de Benzen (dosage indirect).

To-Do Remplacer javel par vitamine C?

LC 25 : Optimisation d'un procédé chimique (CPGE)

LC 26 : Corrosion humide des métaux (CPGE)

Sarrasin. Cachau. JFLM? Tout en un PSI.

Clou dans l'agar agar : bleu et rose avec indicateurs.

1. La corrosion humide

1.1 Thermo

E-pH : le fer et l'eau on des domaines disjoints. Idem avec le zinc. Il y a réaction (oxydation du métal).

On distingue 3 domaines : de passivation, de corrosion, de immunité.

Le cuivre ne s'oxyde pas (montrer E-pH).

L'aluminium s'oxyde mais la passivation est protectrice.

1.2 Cinétique

Diagrammes intensité potentiel.

Immunité, corrosion, passivation (potentiel de Flade).

2. Mise en évidence des phénomènes de corrosion

2.1 Protection cathodique

Manip Zn et Fe dans HNO_3 .

2.2 Aération différentielle

Clou dans le tube à essai.

LC 27 : Conversion réciproque d'énergie électrique en énergie chimique (CPGE)

JFLM. Tout en un PC. TP Term S (pour l'électrolyse)

1. De l'énergie chimique à l'énergie électrique : Pile Daniell

1.1 Présentation

Capable de fournir une énergie.

1.2 Approche thermo

1.2.1 fem

Potentiel de Nernst des deux côtés. Écrire la fem en fonction des concentrations.

Mesurer $U = f(I)$ avec une résistance. Remonter au e et à r_{int} .

1.2.2 capacité

isoT, isoB, isoV, irrev (inégalités)

$$dG < VdP - SdT + \Delta_r G d\xi \text{ et } dH < \delta Q + \delta W_{el}$$

$$dG < \delta Q + \delta W_{el} - TdS - SdT = \delta Q + \delta W_{el}$$

2. De l'énergie électrique à l'énergie chimique : électrolyse de l'eau

Hydrolyse de l'eau : formation de H_2 et O_2 tests caractéristiques : H_2 aboie, O_2 rallume l'allumette. On peut essayer avec la pile Daniell mais ça ne marche pas pour des raisons cinétiques.

2.1 Principe

On veut inverser le signe de $\Delta_r G$. Utilisé dans les sous marins (et ISS?). Attention ne pas mettre de NaCl (formation de Cl_2), mais Na_2SO_4 .

2.2 Thermo

Calculer le potentiel thermo nécessaire (1.23V). Essayer, ça ne marche pas.

2.3 Cinétique

Surtension nécessaire (jusqu'à 2.3V) pour des raisons cinétiques (courbe i-E).

3. Conversion réciproque : accumulateur au plomb

3.1 Première charge

3.2 Fonctionnement ultérieur

LC 28 : Solubilité (CPGE)

MANIP' Béchiers à c_{NaCl} croissante, jusqu'au delà de la saturation. Mesure de conductance : courbe, plateau.
Notion d'équilibre.

1. Équilibre de solubilité

1.1 Constante d'équilibre

Équation de réaction, constante, expression, insister sur la nécessité d'existence du solide pour l'équilibre. Définition du pKs. ODG.

1.2 Condition d'existence du solide

MANIP' Filtrer une solution saturée, ajouter du solide. Définir Q , tracer un diagramme d'existence.

1.3 La solubilité

Définir, donner des exemples. Calculer s dans le solvant utilisé dans la manip du début, et dans l'eau.

2. Déplacement d'équilibres de solubilité

Lois de modération.

2.1 Le potentiel hydrogène

Acide benzoïque, manip qualitative (fonctionne mal), expression des équilibres.

2.2 La température

Dans l'eau :

- KNO_3 : $\frac{\partial s}{\partial T} > 0$
- CaCO_3 : $\frac{\partial s}{\partial T} < 0$
- NaCl : $\frac{\partial s}{\partial T} \approx 0$

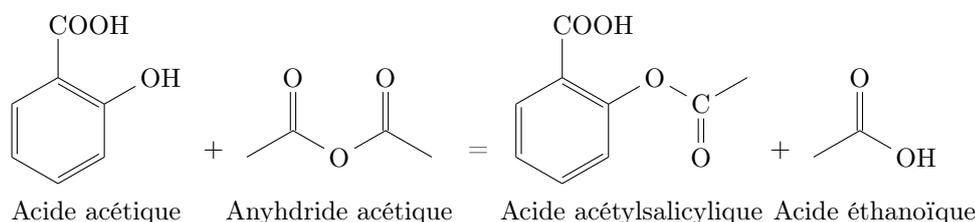
Intéret pour la recristallisation : parler des impuretés.

2.3 Effet d'ion commun

Marche bien avec NaCl et HCl dans l'eau. Calcul de s dans ces conditions. Retour sur $K_s = \text{cste}$, alors que s pas cste.

LC 29 : Cinétique électrochimique (CPGE)

A : L'aspirine



1. Description

1.1 Mécanisme

<https://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/2/25/Acetylsalicyls%C3%A4ure-Synthese.svg>

2. Synthèse de l'aspirine

2.1 Synthèse rapide à froid

- Peser exactement environ 3,0 g de acide salicylique.
- Dans un erlenmeyer (100 ml) introduire l'acide acétique avec 6,0 ml de anhydride éthanoïque (excès $\times 3$) mesurés avec une butette graduée et 10 gtes de acide sulfurique concentré (catalyseur) à l'aide d'une pipette pasteur.
- Placer sous agitation et patienter plusieurs minutes : l'acide salicylique se dissout dans l'anhydride puis l'acide acétylsalicylique précipite lorsque la réaction démarre.

2.2 Synthèse à chaud

3. Extraction de l'aspirine

- Ajouter environ 8 ml de eau (neutralisation) et laisser sous agitation quelque instants.
- Placer l'erlenmeyer dans un bain d'eau glacée et préparer une fiole à vide, un Büchner, et la pompe.
- Quand le mélange a refroidi, essorer le solide en rincant avec de l'eau glacée.

4. Recristallisation

- Préparer un montage à reflux.
- Déposer le solide dans un balon tricol (50 ml), mouiller (1 ml) le solide avec de l'éthanol à l'aide d'une ampoule de coulée.
- Allumer le chauffage, attendre l'ébullition et si besoin ajouter de l'éthanol pour dissoudre complètement le solide.

- Verser quelque millilitres d'eau chaude (relargage), idéalement il n'y a pas immédiatement de précipitation.
- Laisser refroidir d'abord doucement, puis dans un bain d'eau glacée.
- Essorer à nouveau sous vide en rinçant à l'eau glacée.

5. Caractérisation

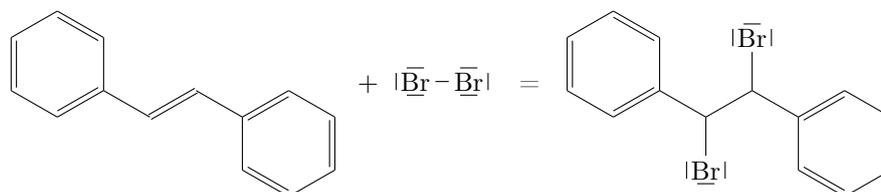
5.1 Chromatographie sur couche mince

- Activer une plaque de silice.
- Préparer l'éluant : mélange 8/2 en pentane/acide acétique.
- Introduire l'éluant dans un récipient fermé et le laisser y saturer l'atmosphère.
- Moudre un cachet d'aspirine commerciale.
- Déposer, après solubilisation dans 4 ml d'éluant, une pointe de spatule de l'aspirine synthétisée, d'aspirine commerciale, et d'acide salicylique.
- La révélation se fait sous lampe UV, ou par pulvérisation d'une solution à 1% en masse de chlorure de fer (III) $[\text{Fe}(\text{Cl})_3]$.

5.2 Test aux phénols

Références : [19], [29]

B : Bromation du stilbène



1. Protocole

1.1 Synthèse

Espèce	M (g mol ⁻¹)	$s_{\text{H}_2\text{O}}$ (g l ⁻¹)	s_{EtOH} (g l ⁻¹)
Stilbène	180,2	0	
Dibrome	159,8	31	

- Peser 0,93 g de stilbène (15,5 mmol) avant de le verser dans un tube à essai
- Ajouter de l'éthanol comme solvant, et attendre que le solide soit dissout
- Verser 1,0 ml de eau de brome (15,5 mmol) lorsque la bromation commence la coloration rouge disparaît

To-Do Ne faudrait-il pas ajouter un excès de dibrome ? Dans ce cas, on le neutralise avec du thiosulfate de sodium lors de l'extraction.

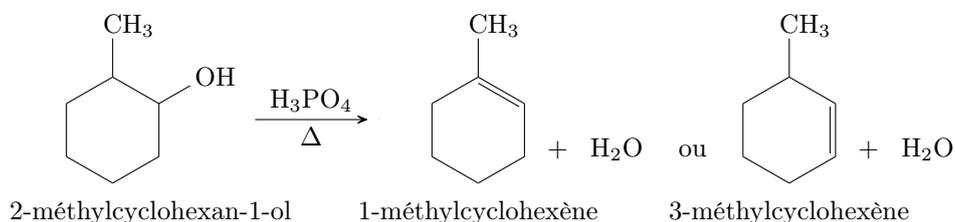
NOTES Pour éviter d'utiliser le dibrome on peut le remplacer par le tribromure de pyridinium qui se dissocie en dibrome et ion bromure en solution. Le dibrome est rapidement consommé.

1.2 Caractérisation

Espèce	T_f (°C)
(Z)-Stilbène	5
(E)-Stilbène	123
(Z)-Stilbène bromé	114
(E)-Stilbène bromé	236

C : Déshydratation d'un alcool

Référence : [53]



1. Hydrodistillation

- Préparer un montage d'hydrodistillation à l'aide d'un thermomètre, d'une tête de colonne, d'une colonne de Vigreux, d'un ballon tricol (250 ml), d'un chauffe ballon, d'un réfrigérant droit, d'un erlenmeyer.
- Introduire dans le ballon, 25 ml de 2-méthylcyclohexanol puis 10 ml de acide phosphorique concentré ainsi que trois grains de pierre ponce.
- Porter à ébullition sans dépasser 95°C , la réaction produisant de l'eau on observera deux phases dans le distillat, la température en tête de colonne s'établit à 80°C .

2. Séparation

- Verser le distillat dans une ampoule à décanter.
- Éliminer la phase aqueuse.
- Laver la phase organique avec de l'hydrogénocarbonate de sodium en solution puis avec un peu l'eau.
- Sécher la phase organique avec du sulfate de magnésium anhydre.
- Essorer sur Büchner.

3. Études possibles

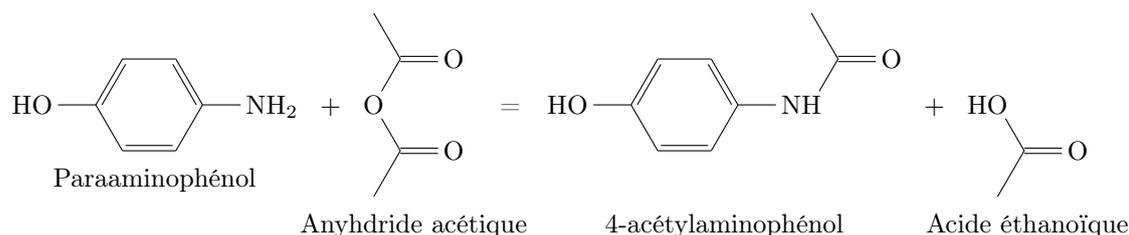
3.1 Produits obtenus

Au réfractomètre de ABBE on peut constater que l'on obtient un mélange racémique des produits.

3.2 Présence d'alcène

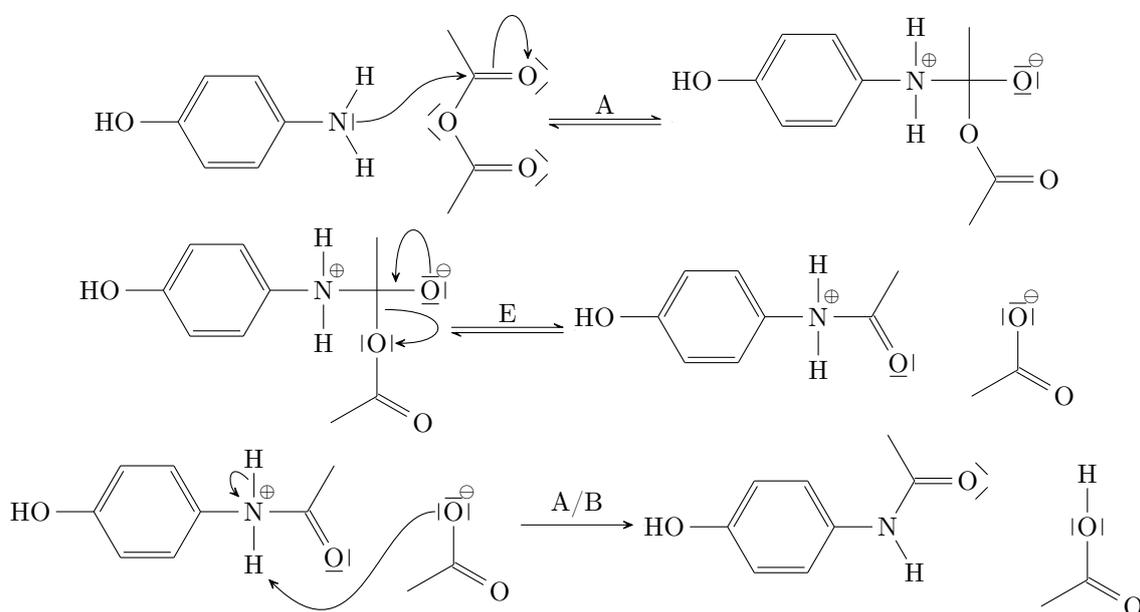
Test à l'eau de brome **B**.

D : Paracétamol



1. Description

1.1 Mécanisme



La dernière étape rend la réaction totale en effet :

Ion du paracétamol	pK_{a1}	
Acide acétique	pK_{a2}	4,76

donc : $pK = pK_{a1} - pK_{a2}$ = l'équilibre est très déplacé vers la droite.

2. Synthèse du paracétamol

- Peser exactement environ 2,37 g de paraaminophénol
- Dans un ballon bicol (100 ml) introduire le paraaminophénol avec 4,7 ml de anhydride éthanoïque (excès $\times 3$) mesurés avec une butette graduée.
- Placer sous agitation et chauffage à 80 °C et patienter plusieurs minutes : le paraaminophénol se dissout dans l'anhydride puis le paracétamol précipite lorsque la réaction démarre.

3. Extraction

- Ajouter 8 ml de eau (neutralisation) et laisser sous agitation quelques instants.
- Placer l'erenmeyer dans un bain d'eau glacée et préparer une fiole à vide, un Büchner, et la pompe.
- Quand le mélange a refroidit, essorer le solide en rincant avec de l'eau glacée.

4. Recristallisation

- Préparer un montage à reflux.
- Déposer le solide dans un balon tricol (50 ml), mouiller (1 ml) le solide avec de l'éthanol à l'aide d'une ampoule de coulée.
- Allumer le chauffage, attendre l'ébullition et si besoin ajouter de l'éthanol pour dissoudre complètement le solide.
- Verser quelque millilitres d'eau chaude (relargage), idéalement il n'y a pas immédiatement de précipitation.
- Laisser refroidir d'abord doucement, puis dans un bain d'eau glacée.
- Essorer à nouveau sous vide en rincant à l'eau glacée.

5. Calcul de rendement

Pour une masse m de paraamoniphénol pesé, la réaction étant supposée totale et l'anhydride ayant été introduit en excès, on s'attend à la formation d'une masse $m \frac{M_2}{M_1}$ de paracétamol, avec : $M_1 = 109,13 \text{ g mol}^{-1}$ la masse molaire du réactif et $M_2 = 151,16 \text{ g mol}^{-1}$ la masse molaire du produit.

Montages de physique

MP 1 : Dynamique du point et du solide

Ce montage constitue une série d'expériences mettant en évidence différents aspects de la dynamique de NEWTON. Le choix des manip est fait de sorte à présenter d'abord la mécanique du point puis la mécanique du solide, en introduisant les référentiels non galiléens dont l'étude est souvent utile dans diverses applications techniques.

1. Gravitation : mesure de $\|\mathbf{g}\|$

On s'intéresse à la chute libre d'une bille (en négligeant les frottements de l'air), et l'on cherche à vérifier la correspondance entre expérience et valeur tabulée concernant la valeur de l'intensité du champ de pesanteur \mathbf{g} dans le laboratoire.

Résultat attendu La Conférence Générale des Poids et des Mesures a défini en 1901 une valeur de l'accélération normale de la pesanteur [4] égale à $g_0 = 9,806\,65\text{ m s}^{-2}$ à l'altitude zéro et pour une latitude de 45° .

Mesures Selon le capteur dont on dispose, on peut mesurer le temps mis par la bille pour descendre d'une hauteur h ou sa vitesse instantanée suite à une chute de hauteur h . Faire attention au zéros.

Remarques Pas de difficulté sur cette expérience, mais le capteur de position interfacé à LatisPro nécessite quelques lignes dans la feuille de calculs. Exporter les valeurs vers Regressi pour le traitement numérique. La connaissance de $\|\mathbf{v}\|$ permet de s'affranchir d'une erreur systématique liée à un décalage possible entre le début de l'acquisition et le début de la chute.

Py-Do Faire un fichier python pour automatiser ces calculs!

2. Force centrifuge dans un référentiel non galiléen

On cherche à vérifier l'égalité entre expérience et théorie concernant la norme de la force centrifuge \mathbf{F}_e perçue dans un référentiel tournant à vitesse Ω .

Résultat attendu La composition des accélérations en relativité de GALILÉE donne une valeur de $\|\mathbf{a}_e\|^{th} = l\Omega^2$ pour l'accélération d'inertie d'entraînement centrifuge ressentie à la distance l de l'axe de rotation dans le référentiel tournant mais sans translations par rapport au référentiel du laboratoire. D'où $\|\mathbf{F}_e\|^{th} = ml\Omega^2$.

Mesures Le dispositif habituel nécessite de connaître la constante de raideur du ressort. Il faut *vérifier* la vitesse de rotation du plateau. On peut faire des mesures à $\Omega = \text{cste}$ en variant m , ou le contraire, ou les deux.

Remarques Le dispositif de la salle de TP est un peu casse-tête, il faut faire attention devant le jury à ne pas faire une erreur idiote.

3. Approximation gyroscopique

On cherche à vérifier la validité de cette approximation sur une toupie de TP.

Résultat attendu L'approximation gyroscopique prévoit une valeur : $\dot{\psi}^{th} = mgl/J\dot{\phi}$ pour une toupie de masse m , distance l entre le centre de masse et le point d'appui, moment d'inertie J . Ce dernier se ramène à $J = 2/5 mR^2$ pour la boule, qui rend les autres négligeables.

Mesures À ajuster selon le matériel disponible.

Remarques Certains dispositifs permettent de faire varier l , faire varier $\dot{\phi}$ ou g semble plus difficile.

4. Mesure du moment d'inertie d'un solide

TP-Do À faire en TP puis compléter.

5. Frottements, lois de COULOMB

Cette expérience permet de s'écarter de la dynamique du point. On va vérifier les lois de COULOMB concernant les frottements.

Résultat attendu Il y a adhérence tant que $\|\mathbf{F}\| \leq \mu_s \|\mathbf{N}\|$. Lorsqu'il y a glissement, $\|\mathbf{F}\| = \mu_d \|\mathbf{N}\|$. Indépendamment de la surface de contact.

Mesures L'idéal est d'avoir des gammes de surfaces pour différents matériaux. Il convient d'utiliser des masses assez lourdes. Faire plusieurs séries de mesures, on peut s'intéresser à l'incertitude statistique.

Remarques Le dynamomètre du banc en TP n'est pas précis, mais il faut faire avec. Regressi n'est pas idéal pour cette manip.

MP 2 : Surfaces et interfaces

1. Mesures de tensions de surfaces

1.1 Par arrachement

1.2 Cuve à ondes

2. Mesures de coefficients de frottement

2.1 Coefficient de frottement statique

2.2 Coefficient de frottement dynamique

MP 3 : Dynamique des fluides

Dans ce montage, on étudie différents régimes d'écoulements qui donnent lieu à des équations de dynamique différentes, mais toutes des cas particuliers de l'équation de NAVIER-STOKES.

On calculera systématiquement le nombre de REYNOLDS de l'écoulement étudié.

1. Régime de STOKES, écoulement rampant

On étudie la chute d'une petite bille dans le glycérol.

Résultat attendu La vitesse doit suivre une loi en $v(t) = v_{lim}(1 - \exp(-t/\tau))$. Le principe fondamental de la dynamique permet d'établir (dans le cas où la force de frottements est en $f \propto v$) : $v_{lim} = \frac{mg}{6\pi\eta_g R} \left(1 - \frac{\rho_g}{\rho_b}\right)$. On peut en déduire la viscosité dynamique du glycérol de $\eta_{gly} = 0,934 \text{ Pa}\cdot\text{s}$.

Mesures Il faut absolument prendre une vidéo de la chute et faire un pointage pour pouvoir modéliser la vitesse $v(t)$. Le régime transitoire est dominant et on doit mesurer la vitesse limite.

Remarques Le régime transitoire de temps caractéristique τ s'estime simplement par le principe fondamental de la dynamique comme $\tau = \frac{m}{6\pi\eta_g R}$.

2. Écoulement de POISEUILLE : mesure de la viscosité dynamique de l'eau avec le vase de MARIOTTE

Cette manip est intéressante d'un point de vue théorique mais donne de mauvais résultats expérimentaux.

Résultat attendu La valeur tabulée est de $0,890 \text{ Pa}\cdot\text{s}$. Le débit volumique pour un écoulement laminaire dont le profil de vitesse est parabolique s'exprime : $D_v = \frac{\pi r^4}{8\eta l} (P_A - P_B)$ avec P_A la pression à l'entrée du tube d'écoulement et P_B la pression à la sortie.

Mesures On mesure le débit volumique en eau par pesée suite à un écoulement dont la durée a été chronométrée. On pourra tracer $D_v = f(\Delta P)$ pour calculer η .

Remarques Cette manip ne donne jamais une bonne valeur mais on peut la présenter en discutant les difficultés expérimentales et les raisons de l'erreur.

Suppléments Pourquoi le tube est-il si long ?

Pour que l'expression du débit volumique soit valable (c'est à dire que le profil de vitesse soit parabolique) on doit s'assurer que l'écoulement est laminaire.

La diffusion de quantité de mouvement (de vitesse) s'exprime : $\rho \frac{\partial v}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$ pour un écoulement selon x . En ordre de grandeur, on en déduit l'épaisseur de la couche limite : $\delta(t) = \sqrt{\frac{\eta t}{\rho}}$, d'où en position : $\delta(x) = \sqrt{\frac{\eta}{\rho} \frac{x}{D_v/S}}$.

On s'intéresse à l'endroit où $\delta(x_l) = r_{tube}$, soit : $x_l = \frac{D_v}{\mu\pi}$ il faut s'assurer que : $x_l < L$.

3. Équation de BERNOULLI

3.1 Tube de VENTURI

3.2 Tube de PITOT

On vérifie ici que l'équation de BERNOULLI donne un résultat satisfaisant l'expérience concernant la relation entre pression et vitesse. On étudie le fonctionnement d'un capteur de vitesse qui se repose sur cette loi.

Résultat attendu On doit avoir $v^2 = 2g\Delta h$ où Δh est la différence de hauteur du niveau d'eau. On vérifiera que l'on retrouve la valeur de g_0 .

Mesures On relève la vitesse avec un anémomètre à hélices de référence, et on mesure ΔH ou ΔP selon le montage du tube de PITOT.

Remarques La sensibilité de la mesure est grande vis-à-vis de la position du tube de PITOT.

4. Ondes capillaires, ondes de gravité : différents régimes des ondes dans les fluides

TP-Do À faire absolument en TP.

MP 4 : Capteurs de grandeurs mécaniques

MP 5 : Mesure de température

To-Do Dans ce montage métrologique, on pourra ajouter et définir les notions de précision, finesse, étendue, justesse.

To-Do On pourra revoir le plan pour introduire le thermomètre à résistance de platine dont l'importance est grande dans [5]. Par ailleurs, on peut envisager deux parties sur chaque type de thermomètres (primaire et secondaire).

Dans ce montage, nous réalisons deux types très différents d'expériences. D'une part nous étudions les thermomètres existants, en les comparant à un thermomètre de référence plus précis et rapide; d'autre part nous réalisons un thermomètre à la manière de CELSIUS, puis nous rapportons l'échelle ainsi créée à l'échelle de KELVIN.

To-Do Il serait intéressant de réaliser un thermomètre basé sur un principe physique donnant une échelle non affine lorsque comparée à celle de CELSIUS. La correspondance par translation entre le °C et le K est un heureux hasard mais rend la compréhension du problème expérimental lié à la mesure de température particulièrement difficile.

1. Temps de réponse des thermomètres

Commencer par ceci permettra de savoir combien de temps nous devons attendre pour atteindre l'équilibre thermique lors des prochaines manip.

NOTES Ne pas confondre temps de réponse et temps caractéristique.

1.1 Thermomètre à alcool

Résultat attendu Le temps de réponse du thermomètre à alcool est grand, de l'ordre de la dizaine de secondes.

TP-Do Vérifier en TP la dépendance de τ avec ΔT .

Mesures Au chronomètre sans difficultés, mais il faudra discuter des incertitudes élevées que l'on peut réduire par méthode statistique.

1.2 Thermistance

Résultat attendu L'ordre de grandeur est le même, on pourra comparer la valeur expérimentale avec la donnée du constructeur.

Mesures On peut ici automatiser l'acquisition et faire plusieurs mesures encore pour réduire les erreurs par méthode statistique.

2. Caractéristique et sensibilité

La caractéristique, c'est la courbe $C = f(T)$ où C est la grandeur mesurée lors de l'utilisation du thermomètre. La sensibilité relative, c'est $s(T) = \frac{1}{T} \frac{dC}{dT}$.

2.1 Thermistance

Résultat attendu Les thermistances CTN suivent une loi en : $R(T) = R_0 \exp\left(-\frac{E_g}{k_B T}\right)$, elles sont particulièrement sensibles à basse température.

To-Do Revoir toute la théorie sur les semi-conducteurs.

Mesures Il suffira de tracer $C(T)$ pour plusieurs températures, et d'ajuster un modèle. On dérivera ensuite ce dernier.

Remarques Les mesures faites ici peuvent permettre de calculer l'énergie de gap du semi-conducteur. On pourra discuter le montage à quatre fils.

2.2 Thermocouple

Résultat attendu La dépendance attendue s'approche de $\Delta V = (\epsilon_1 - \epsilon_2)\Delta T$. Le thermocouple est linéaire sur de courtes plages mais pas globalement. On pourra mettre en évidence ce phénomène, et se reporter à des courbes de valeurs tabulées pour comparer les mesures. La caractéristique dépend essentiellement des métaux aux jonctions.

To-Do Il faudra revoir l'origine microscopique de l'effet SEEBECK.

Mesures Il faudra prendre une température bien connue et fixe pour la température de l'une des jonctions.

Remarques

TP-Do Chercher et décrire comment fonctionne le thermocouple de TP à une seule jonction.

3. Un thermomètre primaire : le thermomètre à gaz

Les thermomètres primaires sont des thermomètres qui suite à la mesure d'une grandeur donnent une valeur de température par un calcul basé sur une loi physique, où n'intervient aucune grandeur inconnue. Ils permettent alors de mesurer l'écart entre le zéro (par exemple) d'une échelle arbitraire, et le zéro absolu.

NOTES Attention, le fait que $\Delta K = \Delta^\circ C$ est dû à un choix arbitraire caché dans la constante des gaz parfaits, le fait qu'il est possible de faire ce choix est dû au fait que CELSIUS a eu bonne intuition en utilisant la dilatation du mercure pour établir son échelle.

Résultat attendu On cherchera déterminer la relation $V = f(T_{\text{C}})$ à pression fixée. On constatera qu'un modèle affine est le plus judicieux conformément à la loi des gaz parfaits. Une extrapolation permettra de trouver la valeur tabulée de $-273,15^{\circ}\text{C}$ pour le zéro absolu. La relation affine nous renseigne aussi sur l'indépendance à la température du coefficient de compressibilité du mercure.

Mesures Il faut sortir le thermomètre à gaz du bain thermostaté pour correctement lire la valeur, ce qui sort le thermomètre de son équilibre : il faut alors aller vite et éventuellement avoir déterminé son temps de réponse. Il faut aussi bien vérifier que tout le gaz se trouve dans le bain.

TP-Do Pourquoi met-on des masses plutôt que de se mettre à P_{atm} en TP ?

Remarques On peut aller plus loin concernant la loi des gaz parfaits et vérifier $P \propto T_{\text{K}}$ puis $P \propto \frac{1}{V}$ mais cela sort du thème. Outre la vérification expérimentale de la loi des gaz parfaits, la connaissance de P permet de déterminer n et justifier l'approximation du gaz parfait. Aussi, si l'on connaît parfaitement le semi-conducteur d'un thermocouple, le thermocouple peut servir de thermomètre primaire.

To-Do Vérifier cette dernière affirmation.

NOTES Attention concernant la détermination de n car elle suppose une valeur de R déjà fixée, alors qu'elle devrait être définie à partir de n .

To-Do Se renseigner sur d'autres thermomètres primaires.

MP 6 : Transitions de phase

1. Chaleur latente de fusion de l'eau

Mesure calorimétrique en mesurant la température d'équilibre d'un système calorimètre + eau ; glace. Avec différentes masses.

Ou chaleur latente de vaporisation.

2. Isothermes de SF6

Plusieurs isothermes dans un diagramme PV.

On peut en tirer la chaleur latente de vaporisation : $l = T(v_v - v_m) \frac{dP_{eq}}{dT_{eq}}$.

3. Recalescence du fer

Mesurer la température et la variation de volume ?

MP 7 : Instruments d'optique

1. Distance focale d'une lentille convergente

Méthode de Bessel.

2. Lunette astronomique

Ou microscope ?

Ou Fourier ?

MP 8 : Interférences lumineuses

Dans ce montage nous mettrons en évidence deux types d'interférences, l'objectif et fil conducteur sera spectrométrique : nous chercherons à mesurer l'écart en longueur d'onde du doublet du sodium.

To-Do Dans ce montage, il faut aussi parler de cohérence spatiale et temporelle !

1. Interférences à division du front d'onde : fentes de YOUNG

Dans cette section nous utilisons le dispositif des fentes de YOUNG pour mesurer la longueur d'onde médiane du doublet du sodium.

Résultat attendu La valeur tabulée est de : 589,2937 nm. L'interfrange i sur la figure d'interférences est liée à la longueur d'onde λ , à la distance D qui sépare l'écran de la lentille, à l'écartement a des fentes, par $i = \frac{\lambda D}{a}$.

Mesures Il faut étalonner les fentes en longueur d'onde grâce à des filtres interférentiels et une lumière blanche. Ensuite remplacer la lumière blanche par la lampe à vapeurs de sodium.

To-Do Décider s'il est préférable de mesurer entre des maxima ou des minima de luminosité.

Remarques Le résultat est normalement assez bon. Il faut bien faire attention à se placer dans les conditions de FRAUNHOFER.

To-Do Se mettre au clair sur la transformée de FOURIER faite par la lentille dans son plan focal objet.

2. Interférences à division d'amplitude : interféromètre de MICHELSON **A**

Maintenant, nous utilisons le michelson pour mesurer l'écart entre les deux composantes du doublet.

Résultat attendu La valeur attendue est de : 0,5974 nm. La relation entre l'écart $\Delta\lambda$, et la distance chariotée entre deux brouillages δx est $\delta x = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}$.

Remarques Le réglage de l'interféromètre doit être parfait pour cette mesure, car des brouillages parasites peuvent être causés par un mauvais parallélisme.

NOTES

Suppléments On s'intéresse à un calcul qui donne $\delta x = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}$ (pour un autre calcul voir chapter A).

La différence de marche pour deux rayons issus d'un incident d'angle i vaut $\delta = 2e \cos(i)$. On a des maximums de luminosité lorsque $\frac{\delta}{\lambda} = n$, c'est à dire $n = \frac{2e \cos(i)}{\lambda}$.

Pour chaque longueur d'onde : $n_j = 2e \cos(i)/\lambda_j$. Au centre : $n_{O_j} = 2e/\lambda_j$.
Pour $e = 0$: $n_{O_1} = 0$ et $n_{O_2} = 0$.

On a un premier brouillage lorsque : $n_{O_2} - n_{O_1} = 1/2 = 2e(\frac{1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1}) \approx 2e(\frac{\Delta\lambda}{\lambda^2})$
soit : $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{4e}$ au premier brouillage.

Entre deux brouillages successifs : $\Delta n^{b1} = \frac{1}{2} = 2e^{b1} \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$, $\Delta n^{b2} = \frac{3}{2} = 2e^{b2} \frac{\Delta\lambda}{\lambda^2}$,
donc : $e^{b2} - e^{b1} = \frac{3\lambda^2}{4\Delta\lambda} - \frac{\lambda^2}{4\Delta\lambda} = \frac{\lambda^2}{2\Delta\lambda}$. D'où : $\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{2\Delta e}$.

MP 9 : Diffraction des ondes lumineuses

1. Diffraction par des objets simples

1.1 Diffraction par une fente

1.2 Théorème de Babinet

1.3 Diffraction par une ouverture circulaire

1.4 Poudre de lycopodes

2. Strioscopie avec un objet d'amplitude (plume)

MP 10 : Spectrométrie optique

1. Spectrométrie dispersive

TP-Do Réseau sur goniomètre, étalonnage avec la lampe à hydrogène + mesure de la constante de RYDBERG. Puis longueurs d'ondes du mercure et du sodium.

To-Do Discuter : réseau par transmission/reflexion/blazé, lampe à deutérium, pouvoir de résolution (critère de RAYLEIGH)

2. Spectrométrie interférentielle

TP-Do Interféromètre de MICHELSON **A** écart doublet du sodium, avec **Caliens**, pouvoir de résolution lié à la TFD : on peut être aussi précis que l'on veut (à condition d'être patient).

On peut extraire le profil des raies, aussi pour le mercure si l'on filtre pour n'en avoir qu'une (avec un filtre + large que la raie et que la TF). Profil lié à DOPPLER (gaussienne) et collisions (lorentzienne).

MP 11 : Émission et absorption de la lumière

1. Loi de BEER-LAMBERT

Mesure de $\epsilon(\lambda)$ dépendance de A à l ?

I/I_0 ?

2. Spectre du Soleil

Loi de Wien, aire en σT^4 , étalonnage avec un source contrôlable ?

(Nécessite un spectro adapté... température pour Wien dans le visible : 3600K)

3. Constante de Rydberg

Estimation de R_y et comparaison à $R_y^{th} = m_e e^4 / 8\epsilon_0 h^3 c$.

4. Spectre de raies d'une autre source

Mesure de longueur d'onde au Michelson ou Fabry-Perrot ?

5. Particularité des lasers ?

6. Absorbtion avec une lampe à vapeur ?

MP 12 : Photorécepteurs

1. Réponse spectrale

2. Temps de réponse

Comparer photodiode avec la thermopile ?

3. Caractéristique

MP 13 : Biréfringence, pouvoir rotatoire

1. Biréfringence naturelle : rayons ordinaire et extraordinaire

1.1 Mise en évidence des deux rayons

On utilise une lumière blanche et un diaphragme pour éclairer un petit morceau de cristal de spath taillé selon son axe optique.

Résultat attendu Sur un écran on observe la présence de deux tâches lumineuses : l'une d'entre elle tourne autour de l'autre lorsque l'on pivote le cristal. La tâche fixe est issue du rayon *ordinaire* et l'autre du rayon *extraordinaire*.

1.2 Polarisation des rayons

Résultat attendu Les deux faisceaux sont polarisés perpendiculairement l'un à l'autre.

Mesures En plaçant un polariseur en amont du spath (pour avoir une lumière polarisée récilignement) et un autre en aval (comme analyseur), on peut chercher à éteindre l'une et l'autre des tâches en pivotant l'analyseur.

Rappels Dans la matière le vecteur déplacement électrique \mathbf{D} s'écrit :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$$

et le vecteur polarisation est :

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 [\chi] \mathbf{E} \quad \text{d'où} \quad \mathbf{D} = \epsilon_0 [\epsilon_r] \mathbf{E}$$

Si la matrice $[\chi]$ est diagonale, le milieu est isotrope et les vecteurs \mathbf{D} et \mathbf{E} sont parallèles. Si elle s'écrit comme :

$$[\chi] = \begin{bmatrix} \chi & & \\ & \chi & \\ & & \chi_z \end{bmatrix}$$

le milieu est dit *uniaxe* d'axe optique \mathbf{e}_z et les vecteurs \mathbf{D} et \mathbf{E} ne sont pas collinéaires. Dans ce cas, tout se passe comme si le milieu avait deux indices optiques n_o et n_e , le vecteur \mathbf{D} se décompose comme $\mathbf{D} = \mathbf{D}_o + \mathbf{D}_e$. \mathbf{D}_o est collinéaire à \mathbf{E} alors que \mathbf{D}_e ne l'est pas.

Pour la composante ou le vecteur déplacement est collinéaire au champ électrique le vecteur d'onde \mathbf{k} est collinéaire au vecteur de POYNTING $\mathbf{\Pi}$: la phase et l'énergie se propagent dans la même direction. On rappelle la définition :

$$\mathbf{\Pi} \equiv \mathbf{E} \times \mathbf{H}$$

2. Spectre cannelé des lames de quartz

On éclaire en lumière blanche parallèle, polarisée (via un polariseur + filtre AC), avec diaphragme et une lentille, une lame de quartz d'épaisseur e taillée parallèlement à son axe optique.

Un second polariseur croisé au premier analyse la lumière sortante du quartz et une lentille fait converger la lumière vers un spectrophotomètre USB.

Résultat attendu On obtient un spectre cannelé où la lumière est éteinte pour des longueurs d'ondes espacées régulièrement. L'écart entre ces longueurs d'ondes permet de remonter à l'écart entre les deux indices du quartz : $\Delta n^{\text{tab}} = 9,5 \times 10^{-3}$.

Mesures Pour deux longueurs d'ondes éteintes $\lambda_{p'}$ et λ_p , on peut montrer que :

$$\Delta n = \frac{\lambda_{p'} \lambda_p}{e(\lambda_{p'} - \lambda_p)} \Delta p$$

Remarques Les cannelures sont résultat d'interférences entre la lumière de chaque rayon. L'analyseur permet de maximiser le contraste : pour qu'il y ait interférences on doit projeter les deux faisceaux sur le même axe de polarisation. Dans cette expérience il n'y a pas séparation géométrique des faisceaux.

3. Pouvoir rotatoire naturel

On éclaire avec un laser une série de lames de quartz d'épaisseur e variable taillées perpendiculairement à leurs axes optiques. Un analyseur permet d'éteindre la lumière projetée sur un écran.

Résultat attendu La relation $\alpha = f(e)$ est linéaire on doit trouver $\frac{\alpha}{e} = 18,9 \text{ deg/mm}$.

Mesures On prendra comme référence pour l'angle α l'angle de polarisation du laser, que l'on détermine en l'absence de quartz.

Remarques $\frac{\alpha}{e}$ dépend de λ d'où le besoin d'utiliser un laser. Cette technique est utilisée en chimie pour caractériser des solutions.

4. Pouvoir rotatoire induit : effet FARADAY

Un morceau de verre flint est placé dans les lignes de champ d'un électroaimant. Les lignes de champ magnétique sont collinéaires au banc optique.

La constante $V = \frac{\alpha}{Be}$ est caractéristique du matériaux. $V = 5 \text{ deg/mm/T}$.

Mesures En l'absence de champ, on éteint la lumière en croisant les polariseurs. Puis en produisant le champ, on observe un rallumage de la tâche. On relève le delta d'angle pour lequel la tâche s'éteint à nouveau.

MP 14 : Polarisation des ondes électromagnétiques

Le modèle scalaire n'explique pas tout.

1. Loi de Malus, polarisation rectiligne

Montrer l'atténuation en fonction de l'angle, avec un laser polarisé.

Montrer que la nouvelle onde est réellement projetée, pas juste atténuée.

2. Polarisation non rectiligne

Si on met une $\lambda/4$ sur le trajet d'une source polarisée rectilignement, on ne trouve plus d'extinction mais un minimum. (Sauf si l'angle est de 45 deg : dans ce cas, ni max ni min) (Sauf si l'angle est de 0 ou 90 deg : dans ce cas, extinction)

La $\lambda/4$ est biréfringente : à l'intérieur la pola rectiligne est décomposée selon les deux axes de la lame et chaque composante se propage à une vitesse différente. En sortie, on trouve une polarisation elliptique.

Spectre cannelé ?

3. Angle de Brewster

Polarisation rectiligne par réflexion.

4. Pola par diffusion ?

Eau et lait

MP 15 : Production et mesure de champs magnétiques

1. Mesure de la composante horizontale du champ magnétique terrestre

Résultat attendu La boussole des tangentes s'oriente sur le champ \mathbf{B} somme du champ des spires (\mathbf{B}_s) et du champ terrestre. Au centre des spires, $\|\mathbf{B}_s\| = \frac{\mu_0 i N}{2r}$. L'angle α de l'aiguille vérifie : $\tan \alpha = \frac{\|\mathbf{B}_s\|}{B_T}$. On s'attend à trouver $B_T = 23 \text{ mT}$.

Mesures On fera plusieurs mesures à plusieurs i et on fera une étude statistique.

Remarques On constate un phénomène d'hystérésis sur la position de l'aiguille. Il peut-être nécessaire de l'aider un peu pour sortir d'un régime d'adhérence.

2. Aimant permanent : intensité du champ

3. Électroaimants

TP-Do Faire cette manip en TP, de sorte à savoir précisément ce que l'on peut faire.

3.1 Intensité du champ créé par une bobine

Résultat attendu De l'ordre du tesla.

3.2 Corps ferromagnétique dans une bobine

On comparera les ferromagnétiques durs aux ferromagnétiques doux, et l'on montrera l'existence d'une aimantation rémanente.

4. Bobines de HELMOLTZ

To-Do Il me faut une biblio!

Résultat attendu Le champ entre les bobines séparées de leur rayon, s'écrit en norme $B_x(x) = \frac{B_0}{\left(1 + \left(\frac{x+R/2}{R}\right)^2\right)^{3/2}} \pm \frac{B_0}{\left(1 + \left(\frac{x-R/2}{R}\right)^2\right)^{3/2}}$ (le signe dépend du sens relatif du courant).

Un développement limité au centre donne : $B_x(x) \approx \text{cste}$ ou $B_x(x) \approx x \cdot \text{cste}$.

Mesures La table tracante sur laquelle on peut fixer une sonde à effet HALL permet une réalisation élégante de cette manip.

Remarques En plus de vérifier l'approximation au centre entre les bobines, on pourra ajuster un modèle et retrouver les valeurs.

5. Champ magnétique tournant : moteur biphasé

To-Do Je dois faire les calculs qui donnent C et R !

MP 16 : Milieux magnétiques

1. Susceptibilité magnétique

1.1 Paramagnétisme et diamagnétisme

On s'intéresse aux effets qualitatifs de la force exercée par le champ magnétique sur un matériau de susceptibilité magnétique inconnue. La force volumique s'exprime : $f = \frac{1}{2\mu_0} \chi_m \nabla(B^2)$.

On place alors un échantillon solide dans l'entrefer d'un électroaimant alimenté en tension continue pour produire un champ stationnaire mais non uniforme. Les matériaux pour lesquels $\chi_m > 0$ vont donc être attirés par les zones de champ fort. Au contraire ceux pour qui $\chi_m < 0$ vont être attirés par les zones de champ faible.

Si l'on suspend des échantillons dans l'entrefer par une corde les matériaux à $\chi_m > 0$ vont s'aligner aux lignes de champ vers le centre de l'aimant. Les autres vont s'aligner perpendiculairement aux lignes de champ.

1.2 Susceptibilité d'une solution aqueuse de FeCl_3 **J**

2. Ferromagnétisme

2.1 Ferromagnétisme doux et dur : cycle d'hystérésis **K**

2.1.1 Aimantation rémanente et champ coercitif

À lire sur le cycle. Comparer un ferro doux à un ferro dur.

2.1.2 Énergie absorbée par le milieu

Aire du cycle, à comparer avec un wattmètre.

2.2 Première aimantation **C**

3. Transition ferro-para

Température de CURIE, cette manip ne peut pas rater et la mesure est faite à la volée... Pas génial.

MP 17 : Métaux

1. Conduction dans les métaux

1.1 Conduction électrique

1.1.1 Mesure d'une résistivité

Montage à 4 fils.

1.1.2 Évolution de σ avec la température

1.2 Conduction thermique

1.2.1 Equation de d'Alembert

1.2.2 Loi de Fourier

2. Effet Seebeck

$$\Delta V = \Delta \epsilon \cdot \Delta T$$

3. Module de Young

$$E = \rho c_{son}^2$$

MP 18 : Matériaux semi-conducteurs

1. Évolution de la résistivité avec la température

Historiquement, c'est FARADAY qui remarque que la résistivité de l'un des « métaux » en sa possession (le sulfure d'argent Ag_2S [32]) diminue avec la température, contrairement à ce qui se passe avec les autres. Depuis, on a expliqué le phénomène et trouvé d'autres matériaux qui présentent ces propriétés, on les appelle *semi-conducteurs*. On se propose dans cette manip de marcher dans les traces de FARADAY, mais avec un autre semi-conducteur plus accessible.

Résultat attendu Comme indiqué on s'attend à ce que la résistivité d'un semi-conducteur diminue avec la température de manière exponentielle, alors que celle d'un métal va augmenter linéairement.

Mesures Avec un bain thermostaté on pourra relever plusieurs valeurs résistances à plusieurs températures et tracer $R_{sc}(T)$ puis $R_{mtal}(T)$. Il semble important de mesurer la température avec un thermomètre à alcool, puisque le fonctionnement des thermomètre à résistance de platine est basé sur la physique que nous étudions ici.

Remarques Si le semi-conducteur étudié est dopé, on remarquera un palier de résistivité à basse températures : on parle de « palier de saturation » (« palier d'épuisement ») sous entendu, saturation (épuisement) des accepteurs (donneurs). À très basse température ($< 100\text{ K}$) on pourrait mettre en évidence le « régime de gel » dans lequel les impuretés ne sont pas encore toutes ionisées la résistivité y décroît quand T décroît.

TP-Do Il semble que le palier soit observé lorsque l'on trace $\ln(R)$, à vérifier en TP ce que donne vraiment le graphe en échelle linéaire.

2. Grandeur caractéristique des semi-conducteurs, l'énergie de gap

$$R = e^{(-E_g/2kT)}$$

3. Effet HALL

4. Jonction P-N : photodiode ?

5. Comparaison photorésistance photodiode ?

MP 19 : Effets capacitifs

1. Le condensateur d'Aepenius

1.1 Distance entre les aramtures

$$C = f(e)$$

1.2 Diélectrique

$\epsilon_{r,verre}$

2. Mesure de capacités

2.1 Multivibrateur astable

2.2 Application au coax

Constante répartie

3. Applications

3.1 Capteur de niveau

3.2 Démodulation : passe bas

MP 20 : Induction, auto-induction

1. Mesure d'inductance dans un circuit

1.1 Inductance propre **H**

On peut utiliser un circuit RLC série pour déterminer la valeur d'une inductance propre, puisque lorsqu'il est alimenté en courant alternatif on observe une résonance en intensité à une fréquence qui dépend de la capacité choisie.

On comparera la valeur expérimentale à celle d'un RLC mètre.

1.2 Inductance mutuelle **I**

Avec deux circuits RLC série couplés par le champ électromagnétique qui traverse leurs bobines, la mesure du coefficient d'induction mutuelle peut se faire à travers l'étude du diagramme $i(\omega)$, puisque les fréquences propres de résonance du système couplé en dépend.

2. Transformateur **K**

3. Fluxmètre

MP 21 : Production et conversion d'énergie électrique

1. Production d'énergie électrique

1.1 Cellule photovoltaïque

1.2 Génératrice de courant continu

2. Conversion d'énergie électrique

2.1 Redresseur alternatif-continu

2.2 Transformateur

MP 22 : Amplification de signaux

MP 23 : Mise en forme, transport et détection de l'information

1. Transport

1.1 Coax

Vitesse de propagation, dispersion.

1.2 Antennes

Bruit.

2. Mise en forme et détection

MÉDIA `./document/falstad.com_circuit.js/modem.txt`

2.1 Modulation, démodulation

Montrer des TF!

3. Numérisation

Montrer l'intérêt.

MP 24 : Signal et bruit

1. Quantification et échantillonnage
2. Analyse spectrale de réponse impulsionnelle
3. Hétérodynage

Moins de points, même résultat ?

4. Bruit et filtrage
 - 4.1 Caractérisation du bruit
 - 4.2 Filtrage

MP 25 : Mesure des fréquences temporelles (domaine de l'optique exclu)

Dans ce montage, nous présentons des principes de mesures : il ne va pas s'agir de quantifier précisément des fréquences mais de découvrir le fonctionnement des fréquencemètres, l'analyse spectrale de FOURIER et ses avantages, ainsi qu'une méthode de mesure qui permettra de déterminer la fréquence de signaux bien plus rapides que les interfaces d'acquisition.

1. Mesure par comptage : fréquencemètres numériques **D**

Pour mesurer la fréquence d'un pendule, nous utilisons un chronomètre et comptons le nombre d'oscillations effectuées pendant 10 secondes. Les fréquencemètres numériques fonctionnent sur le même principe, par le moyen d'une électronique logique dont les temps de basculements sont bien plus courts que les réflexes humains.

2. Pont de WIEN **G**

Le pont de WIEN permet de déterminer simplement la fréquence d'un signal électronique. Contrairement aux autres mesures présentées celle-ci ne nécessite pas de fréquence de référence.

3. Analyse du signal, transformée de FOURIER

Les systèmes précédents ne sont efficaces que pour mesurer la fréquence de signaux monochromatiques. . . En pratique dès que l'on va s'intéresser à un signal non sinusoïdal on utilisera l'outil informatique pour calculer la transformée de FOURIER discrète (TFD) du signal temporel.

3.1 Spectre d'un signal

La TFD pour un signal $s_n = s(t = nT_e)$ de N échantillons est définie par :

$$S_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-2i\pi k \frac{n}{N}} \quad \text{pour } 0 \leq k < N$$

Le spectre du signal est donné par :

$$A(f = kf_e) = S_k$$

À la condition que la période d'échantillonnage f_e soit supérieure au double de la fréquence f_s du signal échantillonné, la TFD permet de calculer le spectre du signal continu.

La TFD nécessite un échantillonnage du signal temporel. Cet échantillonnage est limité en fréquence par l'interface d'acquisition (fréquence d'échantillonnage f_e). Mesurer des signaux de haute fréquence ($f > f_e$) semble donc impossible mais heureusement, deux *trick fantastic* mathématiques vont nous permettre de le faire.

La transformée de FOURIER rapide, que l'on évoque souvent sous l'acronyme FFT, est un algorithme de calcul pour la TFD, qui s'applique dès lors que le nombre de points N est une puissance de 2.

To-Do Il faudrait discuter de la précision en fréquence de la TFD, l'antagonisme entre N et f_e , la condition de SHANNON...

3.2 Mesure par comparaison

3.2.1 Addition de signaux : battements **A**

On exploite le phénomène de battements pour déterminer la fréquence inconnue d'un diapason lesté ($\Delta f \approx 10$ Hz), en simulant un appareil de mesure peu performant avec LatisPro (on règle très peu de points ($N = 128$), pour une durée d'acquisition de l'ordre de 20 s soit $f_e = 6,4$ Hz $> 2f_b$).

3.3 Multiplication de signaux : modulation

$$s(t) = \alpha \sin(\omega_1 t + \varphi_1) \cdot \beta \sin(\omega_2 t + \varphi_2)$$

la trigonométrie donne :

$$s(t) = \frac{\alpha\beta}{2} (\sin(\omega_+ t + \varphi_+) + \sin(\omega_- t + \varphi_-))$$

en notant :

$$\begin{aligned} \omega_+ &= \omega_1 + \omega_2 & \text{et} & & \omega_- &= \omega_1 - \omega_2 \\ \varphi_+ &= \varphi_1 + \varphi_2 & \text{et} & & \varphi_- &= \varphi_1 - \varphi_2 \end{aligned}$$

Dans le spectre du signal modulé on retrouve la différence et la somme des fréquences.

MP 26 : Mesure de longueurs

1. Mesure par temps de vol
 - 1.1 Définition du mètre
 - 1.2 Mesure ultrasonore
2. Mesure par parallaxe
3. Mesure par diffraction
4. Mesure par interférométrie : Michelson

MP 27 : Systèmes bouclés

1. Asservissement : moteur à courant continu

Schéma bien utile : https://www.nutsvolts.com/uploads/wyggam/NV_0105_Dahlen_Figure08.jpg (pas forcément pour les valeurs, mais pour l'organisation).

Le système est commandé via un amplificateur différentiel (soustracteur), et un boîtier générateur de tension continue possédant la fonction maître-esclave.

1.1 Étude de la chaîne directe en boucle ouverte

Déterminer le diagramme de BODE de la boucle ouverte, dont la fonction de transfert est notée $T(j\omega)$. Il s'agit de savoir comment se comporte le système quand il est commandé : gain du capteur et retard par rapport à la commande.

On trouvera que le système se comporte comme un filtre passe bas du deuxième ordre dont on peut déterminer le gain T_0 , le facteur de qualité Q , et la pulsation de coupure ω_0 :

$$T(j\omega) = \frac{T_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{j\omega}{Q\omega_0}}$$

1.2 Asservissement du moteur

La boucle de retour est caractérisée par une fonction de transfert $C(j\omega)$. Le système est stable à condition que : $|T'(j\omega_0)| = |T(j\omega_0)C(j\omega_0)| > 1$?

Pour chaque correcteur ci-dessous on peut mettre en évidence le régime pseudo-périodique, ou le régime apériodique. On détermine les valeurs critiques des composants électroniques.

(On peut prendre $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$ dans la suite)

1.2.1 Correction proportionnelle

Avec un amplificateur non inverseur : $C(j\omega) = \frac{R_1}{R_2}$.

Le système est stable et plus rapide mais laisse une erreur : $\Delta U = f(R_2)$, $\Delta t = f(R_2)$.

1.2.2 Correction intégrale

Avec un intégrateur : $C(j\omega) = \frac{1}{j\omega CR_1}$.

Le système ne laisse plus d'erreur, mais est plus lent : $\Delta U = f(R_2)$, $\Delta t = f(R_2)$.

Le système est instable pour $C < C_{crit} = \frac{QT_0}{R_1\omega_0}$.

1.2.3 Correction intégrale proportionnelle

$C(j\omega) = \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{j\omega CR_1}$.

Δt , ΔU en pseudopériodique et apériodique.

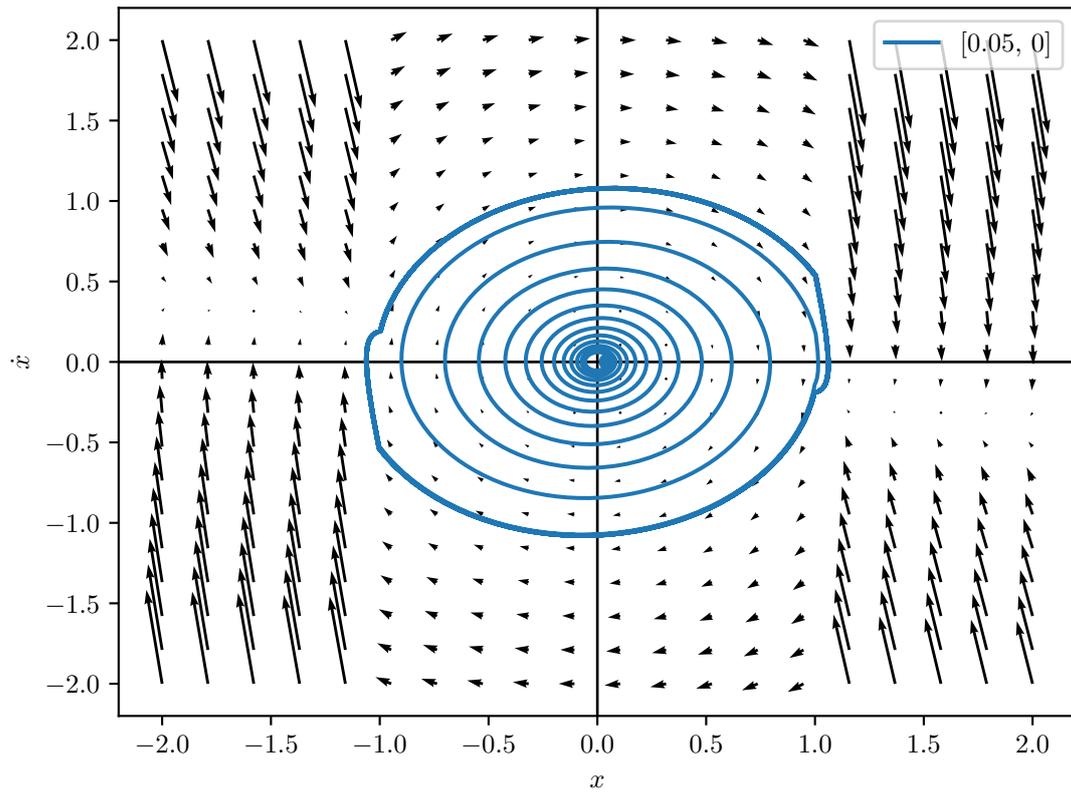
2. Oscillateur à pont de WIEN

Régimes pseudopériodique et apériodique.

MP 28 : Instabilités et phénomènes non-linéaires

1. Pendule simple

2. Oscillateur à impédance négative



MP 29 : Ondes : propagation et conditions aux limites

1. Propagation d'ondes dans le câble coaxial

1.1 Vitesse de propagation, dispersion

1.2 Conditions aux limites, impédance

Impédance caractéristique du câble, impédance d'onde, impédance de terminaison.

2. Ondes mécaniques

2.1 Corde de MELDE

Impédance caractéristique de la corde, impédance d'onde, impédance de terminaison.

Relation de dispersion (non dispersif).

2.2 Cuve à ondes

Relation de dispersion, conditions aux limites.

3. Tube de Kundt ?

MP 30 : Acoustique

1. Production d'un son

1.1 Son émis par le diapason

Décroissance exponentielle, TF, avec/sans caisse de résonance

1.2 Diagramme de rayonnement d'un haut-parleur

2. Propagation

2.1 Propagation libre dans l'air, effet DOPPLER

2.2 Vitesse de propagation

2.2.1 Dans l'eau

2.2.2 Dans un métal

MP 31 : Résonance

1. RLC série

Les résonance ne sont pas les même pour chaque composant : $f_{0,R} \neq f_{0,C} \neq f_{0,L}$.

$$f_0 = f_{0,R} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

$$f_{0,C} = f_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

$$f_{0,L} = f_0 \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$$

On peut tracer les diagrammes de Bode. Avoir en tête les analogies mécaniques.

2. Résonance mécaniques

2.1 Étude spectrale du diapason forcé

Partie réelle du diagramme de Bode, avec l'excitateur magnétique. $U = f(f_{GBF})$

Attention fréquence GBF multipliée par 2 pour l'excitation : $\mathbf{F} = -\nabla E_p$ et :

$$\begin{aligned} E_p &= \mathbf{M}\mathbf{B} \\ \mathbf{M} &= \chi\mathbf{H} \\ \mathbf{H} &= \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \implies \frac{\mathbf{M}}{\chi} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \implies \mathbf{M}\left(\frac{1}{\chi} + 1\right) = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} \\ E_p &= \frac{\mathbf{B}^2}{\mu_0\left(\frac{1}{\chi} + 1\right)} \\ B &\propto \cos(\omega t) \end{aligned}$$

2.2 Réponse impulsionnelle du diapason sans caisse de résonance

Quand je tape, je ne tape pas 440 et pourtant il répond à 440, pourquoi ?

Meilleur facteur de qualité, pas d'adaptation d'impédance donc moins de dissipation : dure plus longtemps mais moins fort.

2.3 Corde de Melde

Ondes stationnaires résonantes.

MP 32 : Couplage des oscillateurs

1. Oscillateurs élastiques

Masses sur le rail. Penser à les peser, et à les ajuster pour qu'elles soient identiques.

Essayer de mesurer la position des deux, tracer les énergies méca, cinétique, potentielles.

Deux modes propres (deux solutions harmoniques qui se somment) : $\omega_s = \sqrt{K/m}$, et $\omega_{as} = \sqrt{(K + 2K')/m}$.

1.1 Couplage fort : $K = K'$

Mesurer les $f_{s/as}$ par TF suite à une acquisition.

1.2 Couplage faible : $K' \ll K$

Prendre $K' = K/4$ convient.

On peut calculer : $\omega_{as} = \sqrt{1 + 2K'/K} \omega_s \approx (1 + K'/K) \omega_s$

On peut observer des battements :

$$\begin{aligned}x &= A \cos((\omega_{as} - \omega_s)t/2) \cos((\omega_{as} + \omega_s)t/2) \\ &= A \cos(\omega_- t) \cos(\omega_+ t)\end{aligned}$$

Mesurer $f_{+/-}$.

1.3 Résonances

Si on peut faire un régime forcé ?

2. Oscillation électriques par inductance mutuelle

Deux circuits RLC, avec des amopules aux bornes de C .

Couplage : $m = M/\sqrt{L_1 L_2}$ fit en $m = ad^b$.

On peut aussi mesure le Δf en fonction de la distance d .

<http://www.sawaya.ecei.tohoku.ac.jp/common/item/pdf/doctor/091208.pdf>

Avoir en tête les analogies élec/méca : couplage inertiel = inductif; couplage élastique = capacitif.

MP 33 : Régimes transitoires

1. Barre de cuivre
2. Bille dans le glycérol
3. Circuit RLC

3.1 Différent types de RT

$$\omega_{pseudo} = f(R)$$

MP 34 : Phénomènes de transport

1. Diffusion thermique
2. Diffusion de quantité de mouvement
3. Rayonnement : loi de stefan

Convection ?

MP 35 : Moteurs

A : Phénomènes de battements

L'étude du phénomène de battements s'appuie sur le calcul trigonométrique qui donne :

$$\begin{aligned}s(t) &= \alpha \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + \beta \sin(\omega_2 t + \varphi_2) \\ &= (\alpha + \beta) \sin(\omega_m t + \varphi_m) \cos(\omega_d t + \varphi_d) + (\alpha - \beta) \cos(\omega_m t + \varphi_m) \sin(\omega_d t + \varphi_d)\end{aligned}$$

avec :

$$\begin{aligned}\omega_m &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} & \text{et} & \quad \omega_d = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \\ \varphi_m &= \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} & \text{et} & \quad \varphi_d = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\end{aligned}$$

dans les conditions « optimales » (notons que le phénomène est notable même en dehors de ces conditions) où $\alpha = \beta$ et $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$, on obtient :

$$s(t) = 2\alpha \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$

Le phénomène se produit à proprement parler lorsque ω_1 et ω_2 sont proches. Le signal $s(t)$ résultant du calcul va correspondre à un signal de haute fréquence (ω_m) modulé par un signal de basse fréquence (ω_d).

L'étude va consister à filtrer (ou ignorer) les oscillations haute fréquence pour déterminer la pulsation des battements ω_d .

- Si l'une des deux fréquences est connue on pourra déterminer l'autre fréquence, même si l'appareil d'acquisition ne permet pas de capter des signaux de haute fréquence.
- Autrement, on pourra déterminer l'écart qui sépare deux fréquences proches.

1. Diapasons

Avec deux diapasons de fréquence de résonance proches ($\Delta f = 10 \text{ Hz}$) (on prendra en pratique, deux diapasons identiques, l'un d'entre eux lesté) on distingue à l'oreille le son des battements.

La superposition d'ondes sonores correspond bien à une addition au sens mathématique.

Avec un montage détecteur d'enveloppe on peut retirer les oscillations haute fréquence du signal et calculer sa transformée de FOURIER, pour obtenir la fréquence des battements. On sera attentif à la fréquence obtenue, car en sortie du détecteur de crête la période fondamentale du signal est divisée par deux.

Dans ce montage une acquisition sur une durée suffisamment longue peut aussi permettre d'estimer la fréquence des battements, par un comptage d'oscillations sur une plage de temps connue.

Lorsque j'ai tenté cette manip le détecteur de crêtes coupait tout le signal pour une raison encore à déterminer...

2. Doublet du sodium

On étudie le doublet du sodium à l'aide d'un interféromètre de MICHELSON.

2.1 Photodiode au centre de l'écran

Au centre de l'écran, l'intensité lumineuse due à une raie s'écrit :

$$I(e) = I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{2\pi\delta}{\lambda} \right) \right) \quad \text{avec} \quad \delta = 2e$$

To-Do Pourquoi ?

alors lorsque la lumière de deux raies (λ_1, λ_2) éclaire l'écran, on obtient (dans les conditions « optimales ») après développement limité :

$$I(e) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi e}{\lambda_m} \right) \cos \left(4\pi e \frac{\lambda_d}{\lambda_m^2} \right) \right)$$

l'étude ne se fait donc pas avec un signal temporel $s(t)$ mais avec un signal $I(e)$ qui évolue avec l'épaisseur de la lame d'air équivalente au MICHELSON. On peut se ramener à un signal en temps si l'on déplace un miroir à une vitesse constante et bien connue, on fait alors l'acquisition du signal sur une photodiode au centre de l'écran.

2.2 Brouillages sur tout l'écran

La mesure de l'écart $\Delta\lambda = 2\lambda_d$ est assez précise si l'on repère les *brouillages* à l'écran, en généralisant l'expression précédente pour les différents angles incidents :

$$I(i, e) = 2I_0 \left(1 + \cos \left(\frac{4\pi e \cos(i)}{\lambda_m} \right) \cos \left(4\pi e \cos(i) \frac{\lambda_d}{\lambda_m^2} \right) \right)$$

on constate que l'intensité $I(i, e)$ va être constante sur l'écran ($I(i, e) = 2I_0 \forall i$) lorsque :

$$4\pi e \cos(i) \frac{\lambda_d}{\lambda_m^2} = 2n\pi \implies e_n = n \frac{\lambda_m^2}{4 \cos(i) \Delta\lambda}$$

en mesurant l'écart entre les e_n on retrouvera l'écart cherché.

B : Chute de la bille

Avec le capteur **LatisPro**, on peut mesurer le temps t mis par la bille pour descendre d'une hauteur h et, sa vitesse instantannée $v = \frac{t_2 - t_1}{\delta h}$ suite à une chute de hauteur h . La mesure de v permet de s'affranchir d'une erreur systématique liée à un décalage possible entre le début de l'acquisition et le début réel de la chute.

Le capteur de position interfacé à **LatisPro** nécessite quelques lignes dans la feuille de calculs, on exportera les valeurs vers **Regressi** pour le traitement numérique.

Py-Do Faire un fichier python pour automatiser ces calculs!

C : Courbe de première aimantation

1. Désaimantation

Il faut d'abord désaimanter le ferro en y appliquant un champ d'amplitude lentement décroissante.

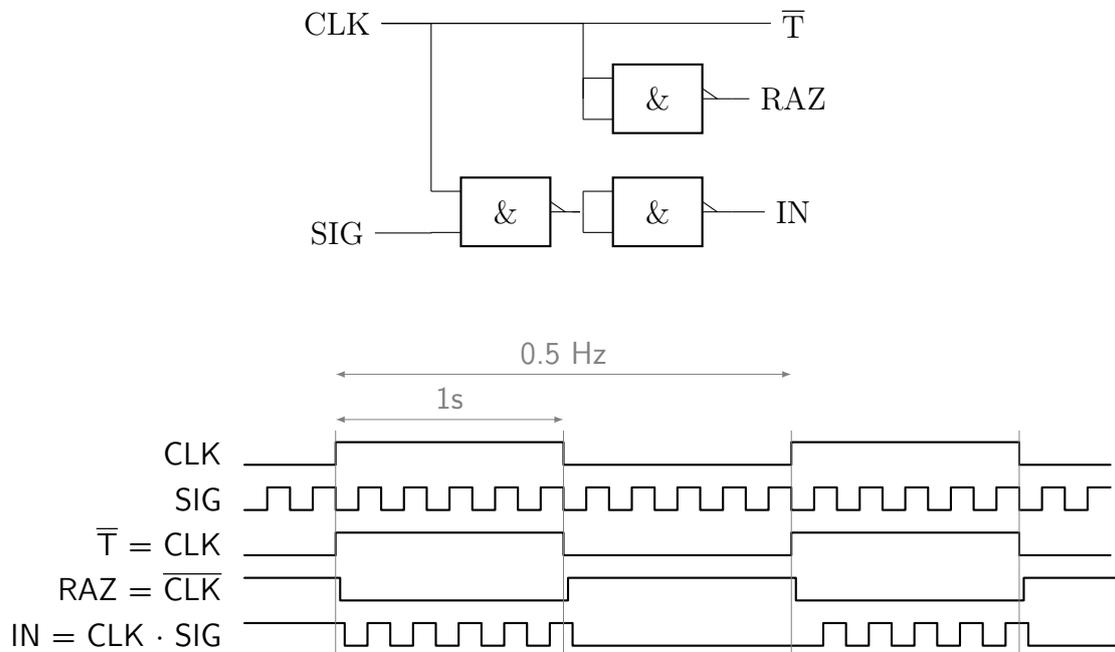
2. Première aimantation

On utilise un générateur de tension continue avec un montage intégrateur pour générer une rampe de tension. On trace la courbe en mesurant le courant au primaire et la tension au secondaire (comme le cycle d'hystérésis : **K**).

Pour pouvoir faire plusieurs essais successifs, le condensateur du montage intégrateur doit pouvoir être déchargé à l'aide d'un interrupteur. Il faudra à chaque fois désaimanter le ferro avant de recommencer.

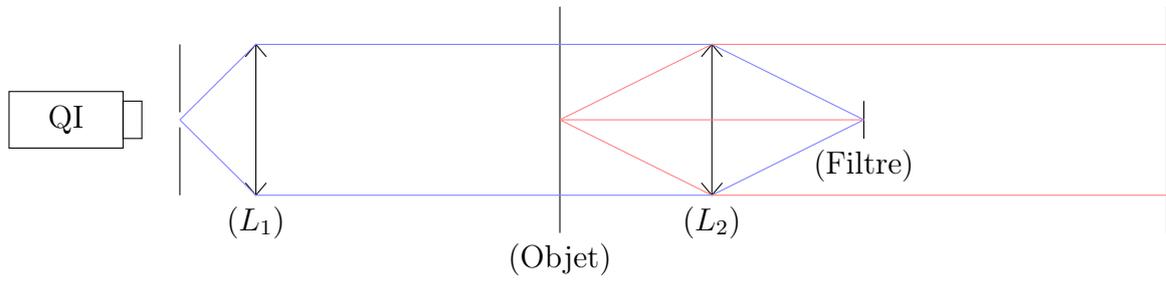
D : Fréquence-mètre numérique

Le compteur et afficheur de la salle de TP permettent de réaliser le montage facilement mais rien ne dit que l'on aura les mêmes aux oraux.



Pour cette manip il faut faire attention au décalage temporel introduit par les portes logique.

E : Optique de FOURIER



F : Pont de SAUTY

Le pont de SAUTY peut être utilisé pour déterminer la capacité et la résistance d'un composant.

To-Do Faire un schéma.

À l'équilibre du pont, on mesure $U = V_C - V_D = 0$ avec :

$$V_C = E \frac{Z_x}{Z + Z_x}$$
$$V_D = E \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

donc à l'équilibre :

$$0 = E \left(\frac{Z_x}{Z + Z_x} - \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \right) \implies Z_2(Z + Z_x) = Z_x(Z_1 + Z_2) \implies Z_2Z = Z_xZ_1$$

en calculant les impédances équivalentes à chaque branche on obtient :

$$\frac{R}{1 + jRC\omega} = \frac{R_x}{R_2} \frac{R_1}{R_1 + jR_1C_1\omega}$$

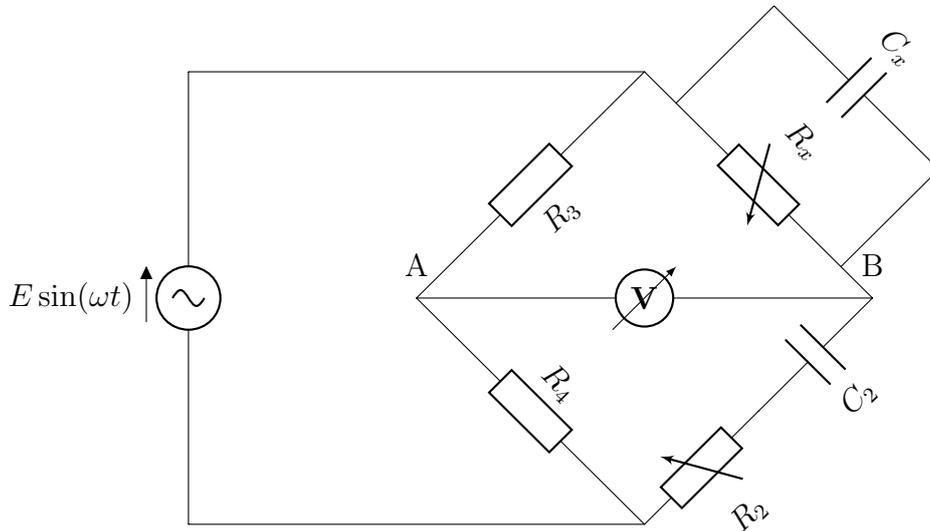
puis après calcul :

$$\begin{cases} R_x = R \frac{R_1}{R_2} \\ C_x = C \frac{R_2}{R_1} \end{cases}$$

en choisissant convenablement $R_1 = R_2$ on pourra facilement déterminer R_x et C_x .

G : Pont de WIEN

Le pont de WIEN peut être utilisé pour déterminer la fréquence d'un signal.



À l'équilibre du pont, on mesure $U = V_A - V_B = 0$ de sorte que :

$$\begin{cases} Z_4 i = Z_2 i' \\ E - Z_3 i = E - Z_x i' \end{cases} \implies \frac{Z_4}{Z_3} = \frac{Z_2}{Z_x}$$

en calculant les impédances équivalentes de chaque branche, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{C_x}{C_2} = \frac{R_4}{R_3} - \frac{R_2}{R_x} & \text{(partie réelle)} \\ \omega^2 = \frac{1}{R_x C_x R_2 C_2} & \text{(partie imaginaire)} \end{cases}$$

On s'assurera que $R_x = R_2 = R$ et que l'on a choisit $R_4 = 2R_3$ et $C_x = C_2 = C$ de sorte que le système d'équation se simplifie en :

$$\begin{cases} 1 = 2 - 1 \\ \omega = \frac{1}{RC} \end{cases}$$

H : Circuit RLC série

1. Résonance en courant

Le circuit RLC série présente une résonance en courant, que l'on peut étudier en mesurant la tension aux bornes de la résistance.

L'impédance équivalente du circuit est :

$$Z = R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)$$

or : $i = \frac{U}{R} = \frac{E}{Z}$ de sorte que l'intensité du courant dans le circuit :

$$i = \frac{E}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)}$$

est maximale lorsque $L\omega - 1/C\omega$ est minimale, on dit que dans cette condition il y a résonance. La résonance est obtenue pour la pulsation $\omega \equiv \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$.

I : Circuits RLC série couplés par induction

Deux circuits RLC série sont couplés par l'induction mutuelle entre leurs bobines, puisqu'elles partagent un même champ magnétique.

1. Régime forcé

En choisissant les composants de sorte qu'ils aient deux à deux les mêmes caractéristiques, on peut écrire :

$$\begin{cases} E = \left(\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R \right) i_1 + jM\omega i_2 \\ 0 = \left(\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R \right) i_2 + jM\omega i_1 \end{cases} \implies \begin{cases} E = Zi_1 + Z'i_2 \\ 0 = Zi_2 + Z'i_1 \end{cases}$$

avec :

$$Z = \frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R \quad \text{et} \quad Z' = jM\omega$$

alors on obtient :

$$i_2 = \frac{Z'}{Z} i_1 \implies E = Zi_1 + \frac{Z'^2}{Z} i_1 \implies i = \frac{E}{Z + Z'^2/Z}$$

il y a donc résonance en courant pour $Z = \pm Z'$ soit :

$$\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R = jM\omega$$

Pour qu'il y ait résonance il faut donc une résistance très faible devant les autres impédances, les pulsations de résonance sont : $\omega_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{C(L \pm M)}}$.

Sur le diagramme $i(\omega)$, on doit donc observer deux maxima dont les fréquences s'écartent quand le couplage augmente (donc quand la distance entre les bobines diminue).

J : Susceptibilité magnétique d'une solution aqueuse de FeCl_3

1. Principe [30]

On place une solution dans un tube en U, dont l'une des branches se trouve dans l'entrefer d'un électroaimant alimenté en tension continue.

On considère un volume $d\tau$ de la solution, sur celui-ci s'appliquent (en projection sur la verticale ascendante) :

- le poids $df_g = -\rho d\tau g = -\nabla(\rho g z) d\tau$
- les forces de pression $df_p = -\nabla(p) d\tau$
- les forces d'origine magnétique $df_m = \frac{\chi_m}{2\mu_0} \nabla(B^2) d\tau$

Lorsque ce volume est à l'équilibre on peut écrire :

$$-\rho g z - p(z) + \frac{\chi_m}{2\mu_0} B(z)^2 = \text{cste}$$

Selon le dispositif, on applique alors cette relation à la partie du fluide au cœur de l'électroaimant et à la partie de fluide loin de l'électroaimant (si le niveau du fluide loin ne varie pas) ou à la partie du fluide au cœur de l'électroaimant en présence et en l'absence de champ (si le niveau du fluide loin varie).

2. Valeur attendue

On peut tracer $h = f(B^2)$ après avoir étalonné $B = f(i)$.

Pour FeCl_3 $\chi_m^{tab} = 3,57 \times 10^{-4}$. On fera attention à la dilution de la solution : la susceptibilité n'est pas celle de $\text{FeCl}_3(\text{s})$. On vérifiera aussi les effets du champ sur l'eau pure.

K : Transformateur

1. Rapport de tensions

La loi de LENZ donne la force électromotrice e , induite par le flux magnétique Φ issu du champ magnétique \mathbf{B} qui traverse un circuit :

$$e = -\frac{d\Phi}{dt}$$

Dans le cas du transformateur on aura :

$$\begin{cases} e_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -N_1 S \frac{dB}{dt} \\ e_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = -N_2 S \frac{dB}{dt} \end{cases} \implies \frac{e_1}{N_1} = \frac{e_2}{N_2} \implies \frac{e_1}{e_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

on peut donc choisir les nombres de spires de manière à augmenter ou diminuer la tension dans le secondaire comparativement à celle du primaire.

2. Rapport de courants

Le théorème d'AMPÈRE appliqué aux bobinages va donner :

$$\begin{cases} \int_{C_1} B dl = \mu N_1 i_1 \\ \int_{C_2} B dl = \mu N_2 i_2 \end{cases} \implies N_1 i_1 = N_2 i_2 \implies \frac{i_1}{i_2} = \frac{N_2}{N_1}$$

3. Pertes

3.1 Pertes fer

On peut estimer l'ensemble des pertes fer en mesurant la puissance $P_{1,co}$ consommée aux bornes du primaire lorsque le secondaire est en circuit ouvert ($i_2 = 0, i_1 \approx 0$ donc pertes cuivre négligeables). Remarquons qu'une certaine puissance est consommée par effet JOULE dans les bobinages, on doit alors corriger la puissance mesurée par : $P_{fer} = P_{1,co} - r_1 i_1^2$.

La puissance perdue par les pertes fer est proportionnelle à U_1^2 .

3.1.1 Courants de FOUCAULT

Dans le circuit magnétique, le matériaux qui conduit les lignes de champ est soumis au phénomène d'induction et des courants de FOUCAULT vont s'y créer. Par effet JOULE le milieu va donc chauffer, entraînant des pertes d'énergie. Ces effets sont minimisés par feuilletage.

3.1.2 Hystérésis

Le champ magnétique alternatif dans lequel baigne le matériaux entraîne une modification incessante de l'orientation des spins magnétiques. Le phénomène nécessite de l'énergie qui

est puisée dans le champ magnétique. Les pertes sont minimisées par l'utilisation d'un matériau ferromagnétique doux.

On peut mesurer les pertes dues au phénomène d'hystérésis car on montre qu'elle sont proportionnelles à l'aire du cycle dans un graphe $M = f(H)$ or, en circuit ouvert : $B \propto i_1$ et $H \propto \int u_2 dt$. Une intégration numérique avec **LatisPro** fonctionne bien, à condition de modéliser $u_2(t)$ et de retirer au modèle une éventuelle composante continue. La mesure de $i_1(t)$ se fait avec une résistance de puissance de 1Ω .

3.2 Pertes cuivre

Les bobinages sont parcourus par un courant électrique qui s'accompagne d'un effet JOULE, source de dissipation d'énergie.

On peut estimer l'ensemble des pertes cuivre en mesurant la puissance consommée aux bornes du primaire lorsque le secondaire est en court circuit (courant maximal donc pertes cuivre dominantes) sans oublier de retrancher les pertes fer proportionnelles à U_1^2 .

Les pertes cuivres sont proportionnelles à i_2^2 avec une constante de proportionnalité R_0 homogène à une résistance qui correspond à une résistance équivalente du transformateur.

3.3 Fuite de flux

L : Transformée de FOURIER

On rappelle la définition de la transformée de FOURIER :

$$\mathcal{T}_F\{s ; f\} \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} s(t)e^{-2i\pi ft} dt$$

On utilisera le produit de convolution, noté $*$ et défini par :

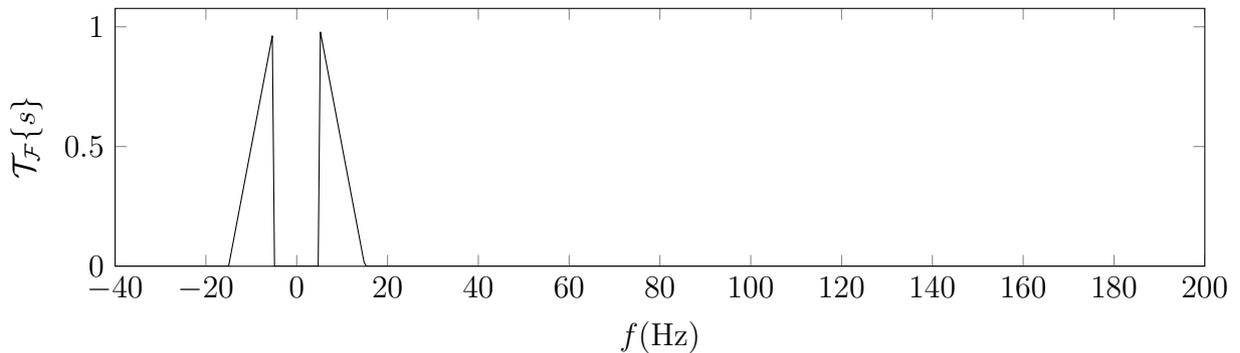
$$(s * f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} s(\tau)f(t - \tau)d\tau$$

Et on exploitera la relation entre transformée de FOURIER et produit de convolution :

$$\mathcal{T}_F\{s \cdot f\} = \mathcal{T}_F\{s\} * \mathcal{T}_F\{f\}$$

1. Acquisition numérique d'un signal

1.1 Échantillonnage



L'échantillonnage est modélisé par la fonction :

$$e(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_e) \equiv \Delta_{T_e}(t) \quad \text{avec} \quad \mathcal{T}_F\{e ; f\} = \Delta_{f_e}(f)$$

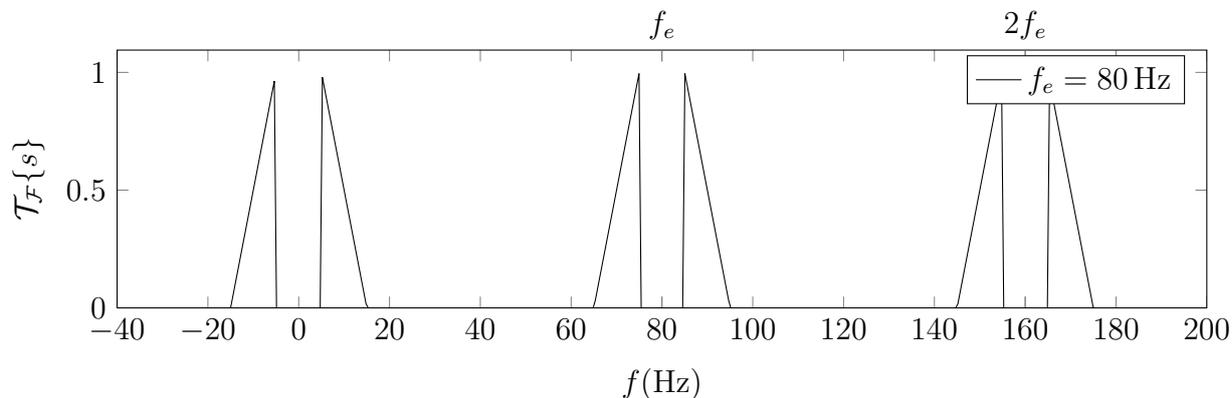
Cette fonction est multipliée au signal $s(t)$ lors de l'opération :

$$s(t) \cdot e(t) = s(t)\Delta_{T_e}(t)$$

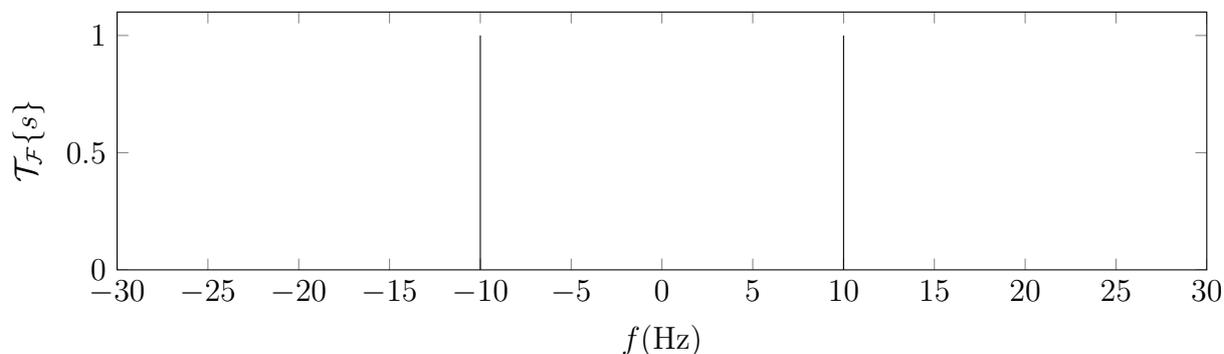
La transformée de FOURIER du signal échantillonné est :

$$\mathcal{T}_F\{s \cdot e\} = \mathcal{T}_F\{s\} * \mathcal{T}_F\{\Delta_{T_e}\} = \mathcal{T}_F\{s\} * \Delta_{f_e}$$

Ce qui correspond (étant donné la convolution par un δ de DIRAC) à une répétition du spectre de $s(t)$, tout les f_e .



1.2 Fenêtre d'acquisition



L'acquisition, sur une fenêtre de temps de durée T_a , est modélisée par la fonction :

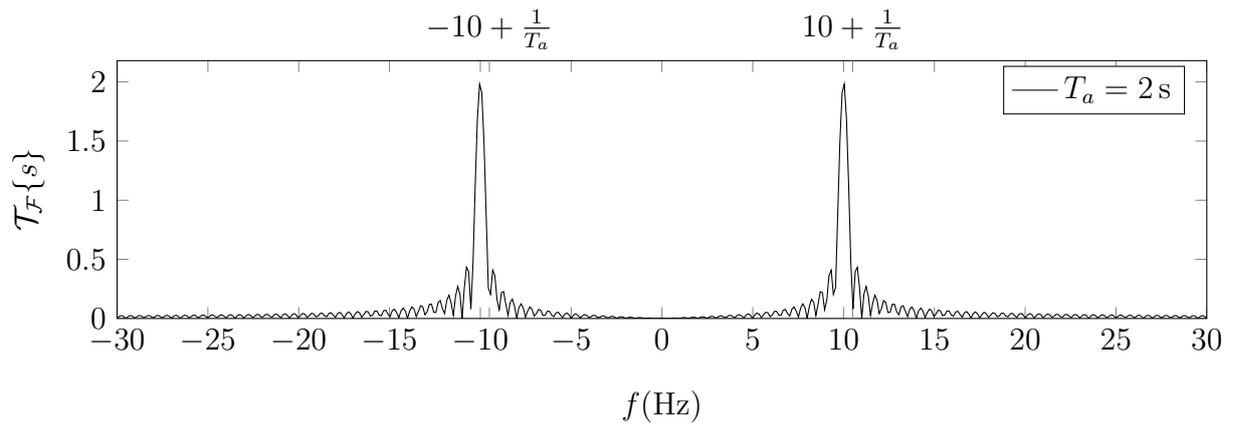
$$a(t) = \Pi_{T_a}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq x \leq T_a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{avec } \mathcal{T}_F\{a ; f\} = \text{sin}_c(f)$$

On a donc, lors de l'acquisition :

$$s(t) \cdot a(t) = s(t)\Pi_{T_a}(t)$$

Et on s'intéresse à la transformée de FOURIER :

$$\mathcal{T}_F\{s \cdot a ; f\} = \mathcal{T}_F\{s ; f\} * \mathcal{T}_F\{a ; f\} = \mathcal{T}_F\{s ; f\} * T_a \text{sin}_c(2\pi f T_a/2)$$



1.3 Échantillonnage sur une fenêtre d'acquisition

Le nombre de points N va prendre de l'importance et s'écrire : $N = \frac{T_a}{T_e} = T_a f_e$.

2. Largeur des raies spectrales

2.1 Diapason

2.2 Raie d'une lampe à vapeur

Origine microscopique Effet DOPPLER (gausienne) et collisions (lorentzienne).

3. Lentilles, optique de FOURIER

Table des constantes physiques

Nom	Symbole	Valeur	Complément	
Nombre d'AVOGADRO	\mathcal{N}_A	$6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$		[55]
Écart entre les deux composantes du doublet du sodium	$\Delta\lambda_{\text{Na}}$	0,5974 nm		[1]
Viscosité dynamique du glycérol	η_{gly}	0,934 Pa s	À 25 °C	[45]
Viscosité dynamique de l'eau	$\eta_{\text{H}_2\text{O}}$	0,890 Pa s	À 25 °C	[45]
Longueur d'onde médiane du doublet du sodium	λ_{Na}	589,2937 nm		[1]
Intensité de la composante horizontale du champ magnétique terrestre à Paris	B_T	23 mT	À la latitude 45° à l'altitude zéro	[2]
Constante de RYDBERG	R_y	$1,096\,78 \times 10^5 \text{ cm}^{-1}$		[55]
Valeur normale du champ de pesanteur à PARIS	g_0	$9,806\,65 \text{ m s}^{-2}$	À la latitude 45° à l'altitude zéro	[4]

Bibliographie

- [1] «Basic atomic spectroscopic data», URL <https://physics.nist.gov/PhysRefData/Handbook/Tables/sodiumtable3.htm>, consulté le 01/10/2018.
- [2] «Magnetic field calculators», URL <https://www.ngdc.noaa.gov/geomag-web/#igrfwmm>, consulté le 09/10/2018.
- [3] «Phénomènes de propagation linéaires : absorption et dispersion», URL http://lnspe2.fr/Cours_Phys/Ondes04.pdf, consulté le 28/01/2019.
- [4] 1901, *Troisième conférence générale*, Comité International des Poids et Mesures.
- [5] 1989, *Échelle internationale de température de 1990 (EIT-90)*, Comité International des Poids et Mesures.
- [6] AGRÉGATION DE PHYSIQUE-CHIMIE - OPTION CHIMIE. 2013, «Épreuve b - physique des interfaces», .
- [7] AGRÉGATION DE PHYSIQUE-CHIMIE - OPTION PHYSIQUE. 2015, «Épreuve A - Microscopies», *Sujet de concours*.
- [8] BAILLET, C. «Oxydation des ions iodure I^- par les ions peroxydisulfate $S_2O_8^{2-}$ », URL http://eduscol.education.fr/rnchimie/phys/baillet/06/tp_ox_iodur.pdf, consulté le 08/10/2018.
- [9] BARRAT, J.-P. 1983, «Introduction à la physique des lasers», *Bulletin de l'Union des Physiciens*, vol. 77, n° 655, p. 1081–1116.
- [10] BASDEVANT, J.-L. 2017, *Introduction à la physique quantique*, De Boeck.
- [11] BERTIN, M., J.-P. FAROUX et J. RENAULT. 1993, *Mécanique 1*, Bordas Éditions.
- [12] BERTIN, M., J.-P. FAROUX et J. RENAULT. 1993, *Mécanique 2*, Bordas Éditions.
- [13] BRADLEY, P. et R. RADEBAUGH. «Properties of selected materials at cryogenic temperatures», URL https://ws680.nist.gov/publication/get_pdf.cfm?pub_id=913059, consulté le 1/04/2019.
- [14] BTS CHIMISTE. 2010, «Épreuve fondamentale de chimie», URL http://eduscol.education.fr/rnchimie/bts_c/annales/10/EFC4-2010.pdf, consulté le 9/04/2019.
- [15] CAGNAC, B., L. TCHANG-BRILLET et C. PEBAY-PEYROULA. 2005, *Physique atomique - 1. Atomes et rayonnement : interactions électromagnétiques*, Dunod.
- [16] CARDINI, S., E. EHRHARD, A. GUERILLOT, T. GUILLOT, B. MORVAN et M.-N. SANZ. 2017, *Physique tout-en-un PSI-PSI**, Dunod.

- [17] CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES. 2003, «Épreuve spécifique, filière MP - Physique 1», *Sujet de concours*.
- [18] DALIBARD, J., P. GRANGIER, M. JOFFRE et M. DE NAUROIS. «Niveaux dénergie dans un double puits», URL <https://fr.coursera.org/lecture/mecanique-quantique/8-5-niveaux-d-energie-dans-un-double-puits-LBTMe>, consulté le 14/01/19.
- [19] DAUMARIE, F., P. GRIESMAR et S. SALZARD. 1998, *Florilège de chimie pratique*, Hermann.
- [20] DE GENNES, P.-G. et F. BROCHARD-WYART. 2015, *Gouttes, bulles, perles et ondes*, Belin.
- [21] DEAN, J. A. 1999, *Lange's handbook of chemistry*, New york ; London : McGraw-Hill, Inc.
- [22] DELANNOY, G., J. JOUAN, O. EMILE et A. LE FLOCH. 2004, «Observation directe de la rotation d'un objet macroscopique induite par le spin du photon», *Journal de Physique (France) IV*, vol. 119, p. 169–170.
- [23] DEMOULIN, P. «Les comètes», URL <http://www.astro.ulg.ac.be/~demoulin/cometes.htm>, consulté le 18/11/18.
- [24] DI MEGLIO, J.-M. 1998, *Les états de la matière*, Nathan Université.
- [25] DIU, B., B. GUTHMANN et D. LEDERER. 2001, *Physique statistique*, Hermann.
- [26] DIU, B., C. GUTHMANN et D. LEDERER. 2007, *Thermodynamique*, Hermann.
- [27] DUFOUR, M., D. BAYE et B. FUKS. 2017, *Mécanique quantique - Une introduction générale illustrée par des exercices résolus*, Ellipses.
- [28] DÉCORPS, M. 2012, *Imagerie de résonance magnétique*, EDP sciences.
- [29] DÜNTSCH, A. et F. LAPENDRY. 2001, «La chimie organique sans maux de tête, avec l'aspirine», *Bulletin de l'Union des Physiciens*, vol. 95, n° 839, p. 1765–1777.
- [30] ENS CACHAN. «Fiche sur la mesure de susceptibilité magnétique : Tube de quincke», URL <http://www.physique.ens-cachan.fr/laboratoire/experiences/fichiers/quincke.pdf>, consulté le 21/05/2019.
- [31] FABRE, C., C. ANTOINE et N. TREPS. 2015, *Introduction à la physique moderne : relativité et physique quantique*, Dunod.
- [32] FARADAY, M. 1833, *On a new loaw of electric conduction ; On conducting power generally*, The Royal Society.
- [33] FEYNMANN, R., R. LEIGHTON et M. SANDS. 2014, *Les cours de physique de Feynman - Mécanique 1*, Dunod.

- [34] FEYNMANN, R., R. LEIGHTON et M. SANDS. 2014, *Les cours de physique de Feynman - Électromagnétisme 1*, Dunod.
- [35] FEYNMANN, R., R. LEIGHTON et M. SANDS. 2014, *Les cours de physique de Feynman - Électromagnétisme 2*, Dunod.
- [36] GALLAIS, Y. «Magnétisme», URL https://www.mpq.univ-paris-diderot.fr/IMG/pdf_cours2-1.pdf, consulté le 22/03/2019.
- [37] GARING, C. 1995, *Ondes électromagnétiques*, Ellipses.
- [38] GIRARD, F. et J. GIRARD. 2015, *Chimie inorganique et générale : des expériences pour mieux comprendre !*, De Boeck.
- [39] GIÉ, H. et J.-P. SARMANT. 1992, «Le portrait de phase des oscillateurs», *Bulletin de l'Union des Physiciens*, vol. 86, n° 744, p. 719–755.
- [40] GRAYE, J.-L. «Particule dans un puit de potentiel – états liés de la particule», URL http://mp3montaignebdx.legtux.org/Cours/Cours_physique_quantique/Particule_dans_potentiel_puits_potentiel_infini.pdf, consulté le 14/01/19.
- [41] GRIFFITHS, D. J. 1999, *Introduction to electrodynamics*, Prentice Hall.
- [42] GUILIÉ, C. «Tables thermodynamiques de l'eau, de l'ammoniac, du fréon 12, de l'azote et du méthane», URL http://intranet.iut-longwy.uhp-nancy.fr/cours_en_ligne/GUILIE-Christian/tables%20thermo.pdf, consulté le 14/10/18.
- [43] GUINER, A. et R. JULLIEN. 1987, *La matière à l'état solide : des supraconducteurs aux superalliages*, Hachette.
- [44] GUYON, E., J. HULIN et L. PETIT. 2012, *Hydrodynamique physique*, EDP sciences.
- [45] HAYNES, W. 2016, *CRC Handbook of Chemistry and Physics*, CRC Press.
- [46] JOHN DAVID, J. 2007, *Classical Electrodynamics*, John Wiley & Sons.
- [47] JÉZÉQUEL, J., H. MONIN-SOYER et D. GÉRARD. 2005, «Étude de l'équilibre entre $\text{NO}_2(\text{g})$ et $\text{N}_2\text{O}_4(\text{g})$ », *Bulletin de l'Union des Physiciens*, vol. 99, n° 879(1), p. 1173–1179.
- [48] KALFOUN, F. «Le rayonnement thermique et la loi du corps noir», URL <http://planet-terre.ens-lyon.fr/article/bilan-radiatif-terre1.xml#rayonnement>, consulté le 7/11/18.
- [49] KITTEL, C. 2007, *Physique de l'état solide*, Dunod.
- [50] DU TRÉMOLET DE LACHEISSERIE, E. 2000, *Magnétisme, Tome 1 - Fondements*, EDP sciences.
- [51] LE MARÉCHAL, J.-F. 2007, *La chimie expérimentale. Tome 2 : Chimie organique et minérale*, Dunod.

- [52] LE SECH, C. et C. NGÔ. 2014, *Physique nucléaire : Des quarks aux applications – Cours et exercices corrigés*, Dunod.
- [53] LECORGNE, D. 2015, «Activité expérimentale : déshydratation d'un alcool», URL <http://dlecorgnechimie.fr/wp-content/uploads/2014/06/deshydratationAlcoolEnonce.pdf>, consulté le 10/04/2019.
- [54] LINSTROM, P. J. et W. G. MALLARD. 2001, «The nist chemistry webbook : A chemical data resource on the internet», *Journal of Chemical & Engineering Data*, vol. 46, n° 5, p. 1059–1063.
- [55] MOHR, P. J., D. B. NEWELL et B. N. TAYLOR. 2014, «Codata recommended values of the fundamental physical constants : 2014», *Journal of Physical and Chemical Reference Data*, vol. 45, n° 4.
- [56] N. W., ASHCROFT et N. D., MERMIN. 2002, *Physique des solides*, EDP sciences.
- [57] NGÔ, C. et H. NGÔ. 2001, *Physique statistique : Introduction*, Dunod.
- [58] OLIVIER, S. et H. GIÉ. 1996, *Thermodynamique : première année et deuxième année*, Technique et documentation Lavoisier.
- [59] PARISOT, R. 1986, «Comparaison du pouvoir oxydant du chlore, du dibrome et du diiode», *Bulletin de l'Union des Physiciens*, vol. 80, n° 684, p. 889–893.
- [60] PERRIN, J. 1913, *Les atomes*.
- [61] PÉREZ, J.-P. 1991, *Optique géométrique, ondulatoire et polarisation, avec exercices et problèmes résolus*, Masson.
- [62] PÉREZ, J.-P. 2016, *Relativité : Fondements et applications : Avec 150 exercices et problèmes résolus*, Dunod.
- [63] PÉREZ, J.-P., R. CARLES et R. FLECKINGER. 2002, *Électromagnétisme : fondements et applications : Avec 300 exercices et problèmes résolus*, Dunod.
- [64] PÉREZ, J.-P. et O. PUJOL. 2014, *Mécanique : fondements et applications : Avec 320 exercices et problèmes résolus*, Dunod.
- [65] ROUSSEL, J. 2019, «Le principe de FERMAT», URL <https://femto-physique.fr/optique/principe-de-fermat.php>, consulté le 11/04/2019.
- [66] SALAMITO, B., S. CARDINI, D. JURINE et M.-N. SANZ. 2018, *Physique tout-en-un PCSI*, Dunod.
- [67] SAUVAGE, J.-P., L. LECAMP et M. FICHEUX. 2008, *Exposés de chimie*, Ellipses.
- [68] TAILLET, R. 2006, *Optique physique*, De Boeck.
- [69] THIBIERGE, E. 2015, «Complément sur le théorème de localisation des interférences», URL http://www.etienne-thibierge.fr/agreg/cplt_localisation.pdf, consulté le 03/02/2019.

- [70] THIBIERGE, E. 2015, «Propagation des ondes», URL http://www.etienne-thibierge.fr/agreg/ondes_poly_2015.pdf, consulté le 23/04/2019.
- [71] WIBERG, E. 2011, *Die chemische Affinität : eine erste Einführung in die Lehre von der Triebkraft chemischer Reaktionen*, Walter de Gruyter.
- [72] WIKIVERSITÉ. 2014, «Ondes électromagnétiques guidées», URL https://fr.wikiversity.org/wiki/Ondes_%C3%A9lectromagn%C3%A9tiques_guid%C3%A9es, consulté le 24/04/2019.
- [73] ÉCOLE POLYTECHNIQUE FÉDÉRALE DE LAUSANNE. «La théorie de DRUDE des métaux», URL https://lns.epfl.ch/wp-content/uploads/2018/08/Chapitre_1.pdf, consulté le 15/04/2019.

Licence

Attribution

Rémi BERTHOZ (remi.berthoz@etu.unistra.fr)

Ce document

Ce document est sous licence **Creative Commons Attribution - Partage dans les Mêmes Conditions 4.0 International**. Pour accéder à une copie de cette licence, merci de vous rendre à l'adresse suivante : <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.fr>.

Code source de ce document

Le code source \LaTeX utilisé pour mettre en forme ce document est sous la **MIT License**, et est visitable à cette adresse : https://gitlab.com/remiberthoz/agreg_phy_chem.

Illustrations et données

Sauf mention contraire, les illustrations incluses dans ce document sont sous même attribution et sous même licence que ce document.

Les données incluses sont issues d'ouvrages ou de sites internet référencés dans la bibliographie.